ملخص مادة الرياضيات 3-1

التعليم الثانوي

نظام المسارات

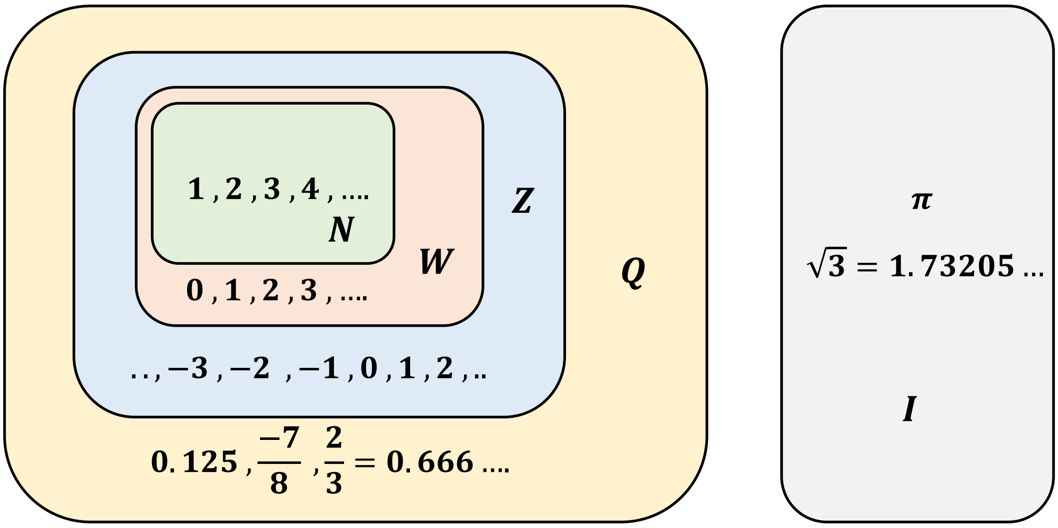
السنة الثالثة

الفصل الأول

تحليل الدوال

مجموعة الأعداد الحقيقية R

$R = Q \cup I$



$N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$

$I \subset R$

الصفة المميزة للمجموعة

$$\{x \mid -2 < x < 5, x \in R\}$$

x ينتمي إلى مجموعة الأعداد	x لها هذه الخصائص ..	الأعداد x حيث ...

مثال

اكتب المجموعة التالية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة :

$$x \leq -3$$

الحل :

$$\{x \mid x \leq -3, x \in R\}$$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي **تقل أو تساوي** -3

رموز الفترات

تستعمل لوصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

فيستعمل الرمزان " [" أو "] " للدلالة على انتماء طرف الفترة إليها

بينما يستعمل الرمزان " (" أو ") " للدلالة على عدم انتماء طرف الفترة إليها .

أما الرمزان " $-\infty$ " أو " ∞ " فيستعملان للدلالة على أن الفترة غير محدودة .

فترات محدودة	
المتباينة	رمز الفترة
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$
$a < x < b$	(a, b)
$a \leq x < b$	$[a, b)$
$a < x \leq b$	$(a, b]$

فترات غير محدودة	
المتباينة	رمز الفترة
$x \geq a$	$[a, \infty)$
$x \leq a$	$(-\infty, a]$
$x > a$	(a, ∞)
$x < a$	$(-\infty, a)$
$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$

الرمزان

$\cup$ **رمز الاتحاد:** ويعني جميع العناصر المنتمية إلى كلا المجموعتين .

$\cap$ **رمز التقاطع:** ويعني جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين .

مثال

اكتب المجموعة التالية باستعمال رمز الفترة :

$x < -2$ أو $x > 9$

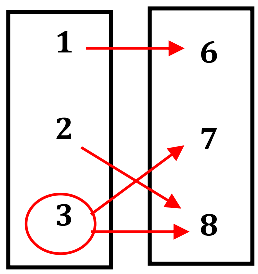
الحل :

$(-\infty, -2) \cup (9, \infty)$

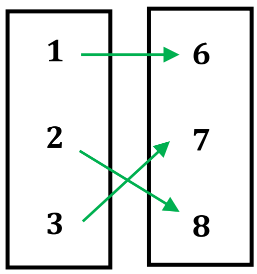
المخطط السهمي — عدديًا

علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B .

مجموعة A

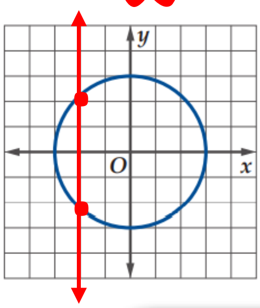


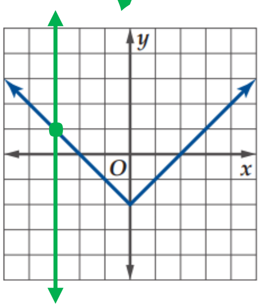
مجموعة B



اختبار الخط الرأسي — بيانيًا

تمثل مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي دالة إذا لم يقطع أي خط رأسي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة .





تمييز الدالة

متى تكون العلاقة دالة ؟؟

الجداول — عدديًا

تكون دالة عندما ترتبط كل قيمة من x بقيمة واحدة لِ y

x	y
-2	3
-2	5
1	2

x	y
-2	3
0	5
1	2

المعادلات — جبريًا

$y^2 - 2x = 5$

$3y + 6x = 18$

تكون y دالة في x

نحل المعادلة بالنسبة لـ y

وعندما لا ترتبط أي قيمة لِ x بقيمتين من y تكون دالة .

رمز الدالة

يستعمل $f(x)$ رمزًا للدالة ويعني قيمة الدالة f عند x وبما أن $f(x)$ تمثل قيمة y التي ترتبط بقيمة x فإننا نكتب $y = f(x)$

المعادلة : $y = -6x$ الدالة المرتبطة بالمعادلة : $f(x) = -6x$

x المتغير المستقل ويمثل قيم المجال

y المتغير التابع ويمثل قيم المدى

إيجاد قيم الدالة

نوجد قيمة الدالة $f(x)$ عند قيمة محددة معطاة لـ x .

مثال : $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ عند $x = 2$

$$f(2) = 2(2)^2 + 3(2) + 1$$

$$f(2) = 15$$

إيجاد قيم الدالة المتعددة التعريف

الدالة متعددة التعريف : هي التي تعرف بقاعدتين أو أكثر على فترات مختلفة .

نوجد قيمة الدالة $f(x)$ عند قيمة محددة معطاة لـ x

وذلك بتحديد الفترة المناسبة لقيمة x .

مثال : أوجد $f(10)$

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 3 \ , & x < 3 \\ -x^3 \ , & 3 \le x \le 8 \\ 3x^2 + 1 \ , & x > 8 \end{cases}$$

أولًا : نحدد الفترة المناسبة لـ $x = 10$

هي الفترة الثالثة

ثم نعوض فيها عن قيمة x

$$f(10) = 3(10)^2 + 1$$

$$f(10) = 301$$

إيجاد مجال الدالة جبرياً

الدالة	المجال	أمثلة
كثيرة حدود	المجال : R	$f(x) = x + 3$ المجال = R
كسرية	$\frac{\text{كثيرة حدود}}{\text{كثيرة حدود}}$ المقام $\neq 0$ نوجد قيم x ونستبعدهم من المقام المجال = أصفار المقام $- R$ المجال : $\{x \mid x \neq \text{أصفار المقام}\ , x \in R\}$	$f(x) = \frac{2+x}{x^2 - 7x}$ $x^2 - 7x \neq 0$ $x(x-7) \neq 0$ $x \neq 0$ $x - 7 \neq 0 \quad \rightarrow x \neq 7$ المجال : $\{x \mid x \neq 0 , x \neq 7 , x \in R\}$
جذرية تربيعية	$\sqrt{\text{ما تحت الجذر}}$ ما تحت الجذر ≥ 0 ونحلها وتكون الصفة المميزة المجال : $\{x \mid \text{الصفة المميزة}\ , x \in R\}$	$f(x) = \sqrt{x-5}$ $x - 5 \geq 0$ $x \geq 5$ المجال : $\{x \mid x \geq 5 , x \in R\}$
كسرية البسط كثيرة حدود والمقام جذر تربيعي	$\frac{\text{كثيرة حدود}}{\sqrt{\text{ما تحت الجذر}}}$ ما تحت الجذر > 0 ونحلها وتكون الصفة المميزة المجال : $\{x \mid \text{الصفة المميزة}\ , x \in R\}$	$f(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x+6}}$ $2x + 6 > 0$ $2x > -6$ $x > -3$ المجال : $\{x \mid x > -3 , x \in R\}$
كسرية البسط جذر تربيعي والمقام كثيرة حدود	$\frac{\sqrt{\text{ما تحت الجذر}}}{\text{كثيرة حدود}}$ لإيجاد المجال : نستخدم طريقة الجذر للبسط وطريقة الكسرية للمقام	$f(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{x-5}$ نوجد البسط: $2x - 3 \geq 0$ $x \geq \frac{3}{2}$: المجال نوجد أصفار المقام $x - 5 \neq 0$ $x \neq 5$ المجال : $x \neq 5$ المجال : $\{x \mid x \geq \frac{3}{2} , x \neq 5 , x \in R\}$

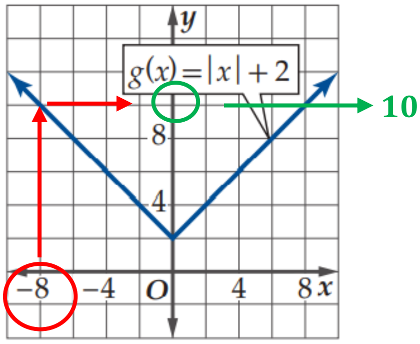
تقدير قيم الدوال

يستعمل التمثيل البياني للدالة في كثير من الأحيان لتقدير قيم الدالة .

في المثال : استعمل التمثيل البياني لتقدير $g(-8)$

ثم تحقق جبريًا وقرب الناتج إلى أقرب جزء من مئة

بيانيًا :



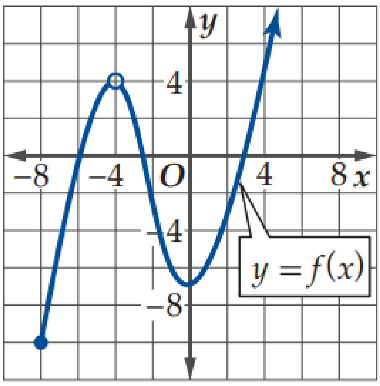
جبريًا :

$$g(-8) = |-8| + 2$$

$$g(-8) = 8 + 2$$

$$g(-8) = 10$$

إيجاد المجال والمدى من خلال التمثيل البياني



المجال

يحدد بيانيًا من محور x

يبدأ المجال من $x = -8$

$x = -4$ ليست في المجال

السهم يدل على استمرارية المجال في الجهة الأخرى .

المجال $= [-8 , -4) \cup (-4 , \infty)$

المدى

يحدد بيانيًا من محور y

يبدأ المدى من $y = -10$

وتزداد قيمة الدالة بلا حدود كما يدل السهم الممتد لأعلى .

المدى $= [-10 , \infty)$

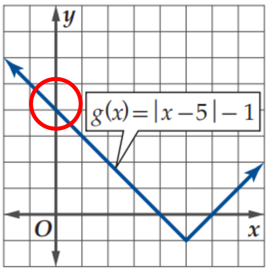
إيجاد المقطع y

النقطة التي يتقاطع عندها المنحنى مع المحور y تسمى المقطع من ذلك المحور.

ويمكن الحصول على المقطع y بالتعويض عن $x = 0$ في معادلة الدالة.

مثال

استعمل التمثيل البياني للدالة لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y ثم أوجده جبرياً :



بيانياً : المنحنى يقطع محور y عند النقطة $(0, 4)$

إذن المقطع y هو 4 .

جبرياً : نعوض عن الـ x بـ صفر

$$g(0) = |0 - 5| - 1$$

$$g(0) = 4$$

إيجاد الأصفار

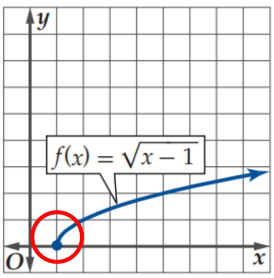
تسمى المقاطع x لمنحنى الدالة أصفار الدالة وتسمى حلول المعادلة

المرافقة للدالة جذور المعادلة ولإيجاد أصفار دالة f

فإننا نحل المعادلة $f(x) = 0$ بالنسبة للمتغير المستقل .

مثال

استعمل التمثيل البياني للدالة لإيجاد قيمة تقريبية لأصفارها ثم أوجدها جبرياً :



بيانياً: المنحنى يقطع محور x عند النقطة $(1, 0)$

إذن المقطع x هو 1.

جبرياً : نعوض عن الـ y بـ صفر

$$0 = \sqrt{x - 1}$$

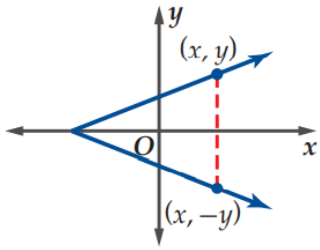
بالتربيع للطرفين

$$x = 1 \leftarrow \quad 0 = x - 1$$

اختبارات التماثل

التماثل حول محور x

بيانيًا:



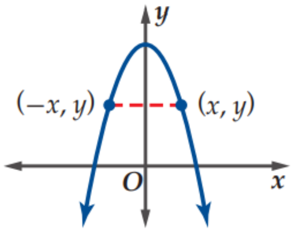
جبريًا:

نعوض عن y بـ $-y$

فيعطي معادلة مكافئة.

التماثل حول محور y

بيانيًا:



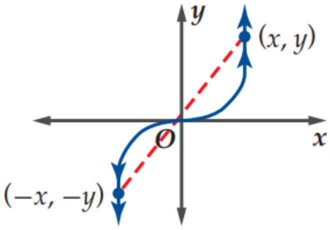
جبريًا:

نعوض عن x بـ $-x$

فيعطي معادلة مكافئة.

التماثل حول محور نقطة الأصل

بيانيًا:



جبريًا:

نعوض عن x بـ $-x$

ونعوض عن y بـ $-y$

فيعطي معادلة مكافئة.

الدوال الزوجية والفردية

زوجية متماثلة حول محور y

جبريًا :

لكل x في مجال f

$f(-x) = f(x)$

فردية متماثلة حول نقطة الأصل

جبريًا :

لكل x في مجال f

$f(-x) = -f(x)$

مثال

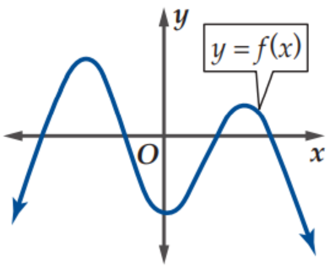
$$f(x) = x^4 + 2$$
$$f(-x) = (-x)^4 + 2$$
$$f(-x) = x^4 + 2$$
$$f(-x) = f(x)$$

ليست زوجية وليست فردية

$$f(x) = 4\sqrt{x}$$
$$f(-x) = 4\sqrt{-x}$$
$$f(-x) \neq f(x)$$
$$f(-x) \neq -f(x)$$

$$f(x) = x^3 - 2x$$
$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)$$
$$f(-x) = -x^3 + 2x$$
$$f(-x) = -(x^3 - 2x)$$
$$f(-x) = -f(x)$$

الدالة المتصلة



تكون الدالة متصلة إذا لم يكن في تمثيلها البياني أي انقطاع أو قفزة.

وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه .

نهاية الدالة

اقتراب قيم الدالة من قيمة واحدة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة .

وهي أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x = c$ بأن تقترب من قيمة واحدة عندما تقترب x من c من جهتي اليمين واليسار .

النهايات

إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L

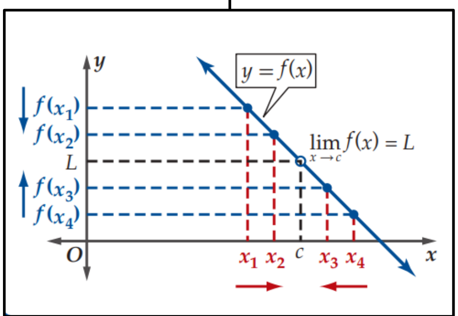
عندما تقترب x من c من الجهتين ،

فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .

ويرمز لها بالرمز :

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

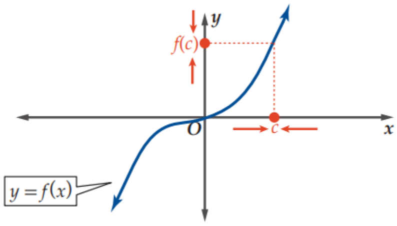
أي : نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L



اختبار الاتصال

يقال أن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حققت الشروط التالية :

1
$f(x)$ معرفة عند c
أي أن $f(c)$ موجودة .



3
$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

2
$f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين
أي أن $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة.

مثال

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = x^3$ متصلة عند $x = 0$

الحل :

نتحقق من الشروط الثلاثة .

1 هل $f(0)$ موجودة ؟

$f(0) = 0$ ، الدالة معرفة عند $x = 0$

2 هل $\lim_{x \to 0} f(x)$ موجودة ؟

نكون جدول يبين قيم $f(x)$ عندما تقترب x من 0 من اليسار واليمين .

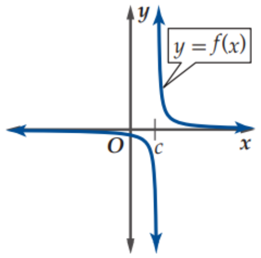
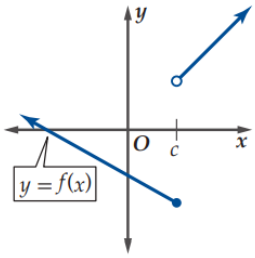
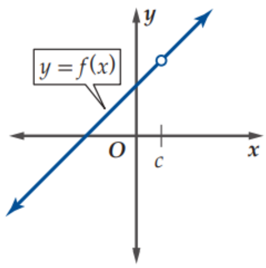
x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.001	-1×10^{-6}	-1×10^{-9}		1×10^{-9}	1×10^{-6}	0.001

الجدول يبين أنه عندما تقترب قيم x من 0 من اليمين واليسار ، فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 0
أي أن : $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

3 هل $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ ؟

بما أن $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ ، $f(0) = 0$ فإن $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ ، إذن الدالة متصلة عند $x = 0$

أنواع عدم الاتصال

التمثيل البياني	نوع عدم الاتصال	شروطها
 إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.	عدم اتصال لانهائي عدم اتصال غير قابل للإزالة	تكون كسرية وعند التعويض بقيمة x الناتج يكون : $\frac{\text{عدد}}{0}$ أي غير معرف .
 إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين ولكنهما غير متساويتين.	عدم اتصال قفزي عدم اتصال غير قابل للإزالة	تكون الدالة متعددة التعريف $f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ , } & x > c \\ f_2(x) \text{ , } & x \leq c \end{cases}$ عند إيجاد النهايات للطرفين من اليمين واليسار تكون غير متساوية $\lim\limits_{x \to c^+} f_1(x) \neq \lim\limits_{x \to c^-} f_2(x)$
 إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة ولا تساوي قيمة الدالة عند $c = x$ ويشار إليها بدائرة صغيرة غير مظللة لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.	عدم اتصال قابل للإزالة	تكون الدالة كسرية وعند التعويض بقيمة x الناتج يكون : $\frac{0}{0}$ أي غير معرف . فنعمل على تحليلها لنعيد تعريفها من جديد لتصبح متصلة .

أمثلة على أنواع عدم الاتصال

1

$f(x)=\frac{1}{x^2}$

عند $x=0$

$f(0)=\frac{1}{0}$

غير معرف

غير متصل نوعه لانهائي

2

$f(x)=\begin{cases}5x+4 , x>2\\ 2-x , x\le 2\end{cases}$

عند $x=2$

$f(2)=2-x$

$=2-2=0$

$\lim_{x\to2^-} 2-x=0$

$\lim_{x\to2^+} 5x+4=14$

$\ne$

النهايات غير متساوية

غير متصل نوعه قفزي

3

$f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$

عند $x=4$

$f(4)=\frac{(4)^2-16}{4-4}=\frac{0}{0}$

غير معرف

نعيد تعريفها :

$\frac{x^2-16}{x-4}$

$=\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}$

$f(x)=x+4$

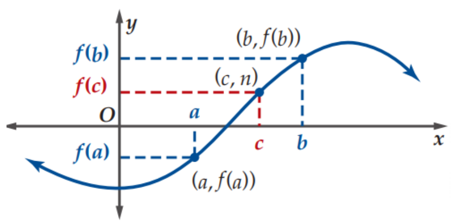
$f(4)=4+4=8$

$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-16}{x-4} , x\ne 4\\ 8 , \quad x=4\end{cases}$

نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a,b]$ وكانت $a<b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a و b ، بحيث $f(c)=n$

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة ، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a و b بحيث $f(c)=0$ أي يوجد صفر للدالة بين a و b .



تقريب الأصفار عند تغيير الإشارة

مثال

حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة:
$f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4, 4]$

الحل :

أولًا: نوجد قيم الدالة في الفترة المحددة

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50

ثانيًا: نوجد الأعداد الصحيحة التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة

وهي بين قيم الدالة التي فيها تغير بالإشارات بين العددين -3 و -2

و بين العددين 0 و 1 وبين العددين 1 و 2 .

تقريب الأصفار دون تغيّر الإشارة

مثال

حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة:
$f(x) = x^2 + x + 0.16$ في الفترة $[-3, 3]$

الحل :

أولًا: نوجد قيم الدالة في الفترة المحددة

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16

ثانيًا: نوجد الأعداد الصحيحة التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة

وهنا قيم الدالة لا تتغير إشاراتها عند قيم x المعطاة ولكن $f(x)$ تتناقص عندما

تقترب قيم x من العدد -1 من اليسار ، وتبدأ $f(x)$ بالتزايد عن يمين $x = 0$

من المحتمل وجود صفر حقيقي للدالة بين العددين المتتاليين -1 و 0.

سلوك طرفي التمثيل البياني

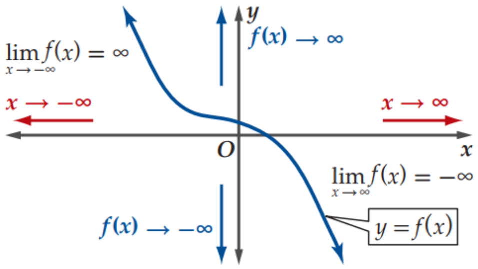
يصف شكل الدالة عند طرفي منحناها ، أي يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود ، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$

ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني نستعمل مفهوم النهاية .

دراسة سلوك طرفي التمثيل البياني

من اليمين $\lim_{x\to\infty} f(x)$

من اليسار $\lim_{x\to-\infty} f(x)$



كثيرة حدود

من الرسم نحدد السلوك

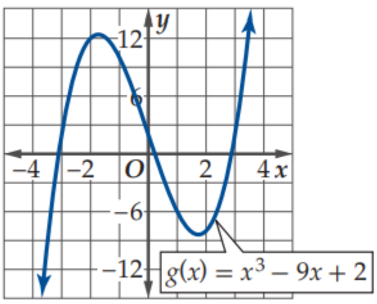
إذا كان :

اتجاه السهم إلى أعلى ∞

اتجاه السهم إلى أسفل $-\infty$

مثال

استعمل التمثيل البياني للدالة لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني :



الحل :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

كسرية

درجة البسط < درجة المقام

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

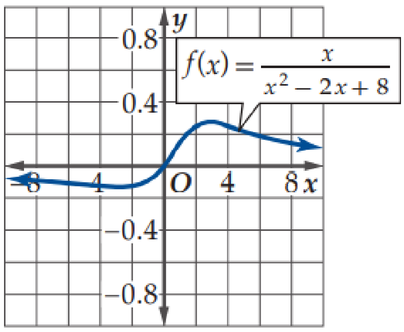
درجة البسط > درجة المقام

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

درجة البسط = درجة المقام

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\text{معامل الحد الرئيس}}{\text{معامل الحد الرئيس}}$$

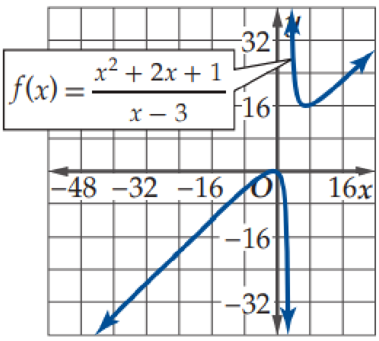
مثال :



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

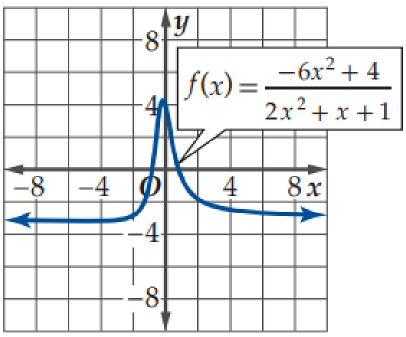
مثال :



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

مثال :



$$\lim_{x\to\infty} f(x) =$$

$$= \frac{-6}{2} = -3$$

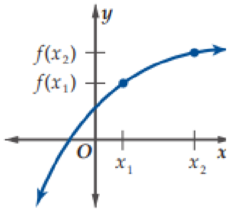
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$$

خصائص الدالة (متزايدة – متناقصة – ثابتة) :

متزايدة

تكون الدالة f متزايدة على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

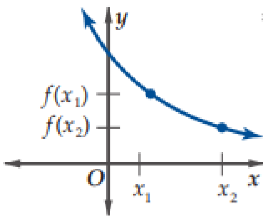
لكل x_1 و x_2 في الفترة ، فإن : $f(x_1) < f(x_2)$ عندما $x_1 < x_2$



متناقصة

تكون الدالة f متناقصة على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

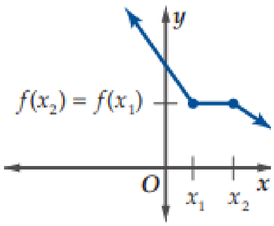
لكل x_1 و x_2 في الفترة ، فإن : $f(x_1) > f(x_2)$ عندما $x_1 < x_2$



ثابتة

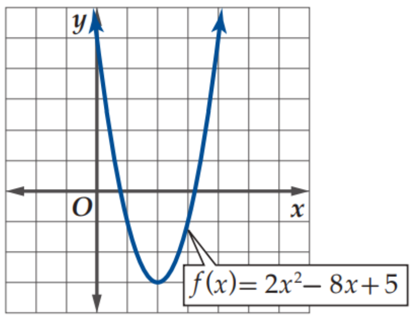
تكون الدالة f ثابتة على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة .

لكل x_1 و x_2 في الفترة ، فإن : $f(x_1) = f(x_2)$ عندما $x_1 < x_2$



مثال

استعمل التمثيل البياني لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة :

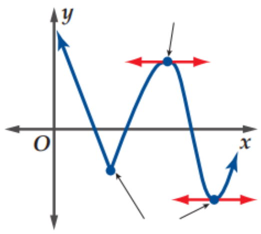


الحل :

الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty , 2)$

الدالة متزايدة في الفترة $(2 , \infty)$

النقاط الحرجة

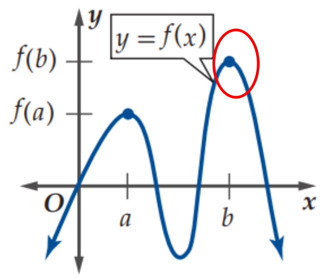
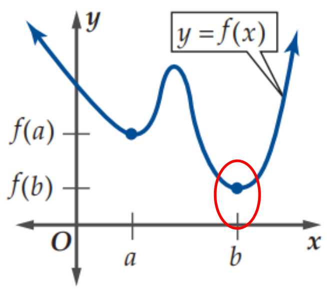


هي النقاط التي تغير الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها

فتكون قمة أو قاعًا في منحنى الدالة .

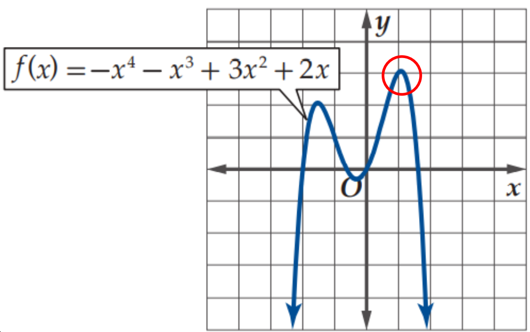
يكون المماس المرسوم للمنحنى عندها إما أفقيًا (ميله صفر) أو عموديًا (ميله غير معرف)
أو أنه لا يوجد عندها مماس ويدل ذلك على وجود قيمة عظمى أو صغرى للدالة .

القيم القصوى المطلقة

العظمى	الصغرى
	
لابد أن يكون اتجاه الأسهم للأسفل والأكثر علواً هي القيمة العظمى المطلقة .	لابد أن يكون اتجاه الأسهم للأعلى والأكثر نزولاً هي القيمة الصغرى المطلقة .
وهي القيمة الأكبر من جميع القيم في مجالها .	وهي القيمة الأصغر من جميع القيم في مجالها .
يوجد قيمة عظمى مطلقة عند $x = b$	يوجد قيمة صغرى مطلقة عند $x = b$

مثال

استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي عندها قيمة قصوى مطلقة
ثم أوجد قيمة الدالة عندها:

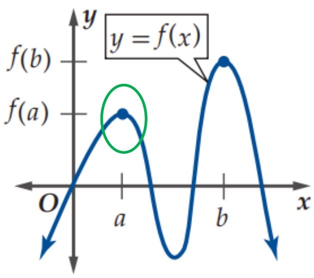
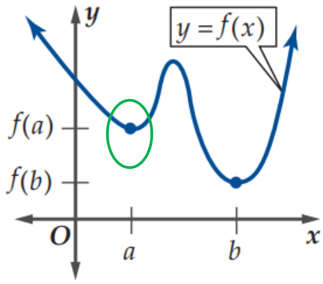


الحل :

توجد قيمة عظمى مطلقة عند $x = 1$

مقدارها $= 3$

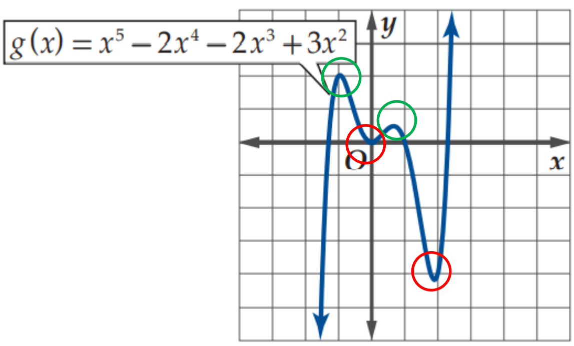
القيم القصوى المحلية

العظمى	الصغرى
	
لا يشترط أن تكون الأسهم في نفس الاتجاه . الأقل ارتفاعًا هي قيمة عظمى محلية. وهي القيمة الأكبر من جميع القيم في فترة من المجال . توجد قيمة عظمى محلية عند $x = a$	لا يشترط أن تكون الأسهم في نفس الاتجاه . الأقل نزولًا هي قيمة صغرى محلية . وهي القيمة الأصغر من جميع القيم في فترة من المجال . توجد قيمة صغرى محلية عند $x = a$

مثال

استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي عندها قيمة قصوى محلية مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة ، ثم أوجد قيمة الدالة عندها:

الحل :



توجد قيمة عظمى محلية عند $x = -1$

مقدارها $= 2$

توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 0.5$

مقدارها $= 0.5$

توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 0$

مقدارها $= 0$

توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 2$

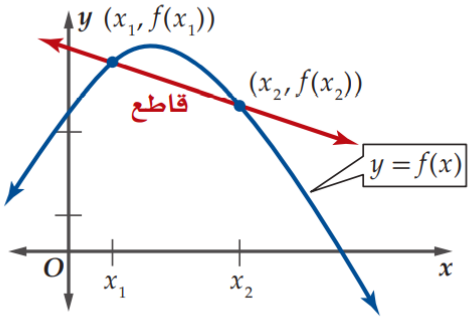
مقدارها $= -4$

متوسط معدل التغير

متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين .

متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو :

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



القاطع : هو المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة .

مثال

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

في الفترة $[2 , 3]$

الحل :

$$f(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 3(3) + 2$$
$$f(3) = 2$$

$$f(2) = (2)^3 - 2(2)^2 - 3(2) + 2$$
$$f(2) = -4$$

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$x_1 = 2 , x_2 = 3$$

$$m_{sec} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2}$$

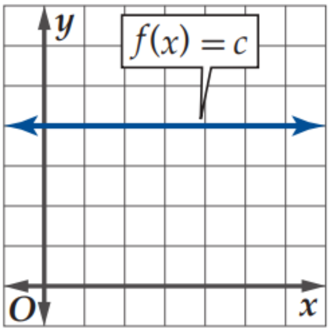
$$= \frac{2 - (-4)}{3 - 2}$$

$$= 6$$

متوسط معدل التغير = السرعة المتوسطة

خصائص الدوال الرئيسة (الأم)

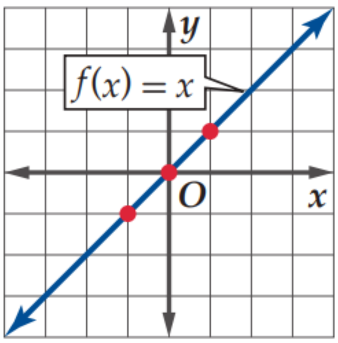
1 الدالة الثابتة $f(x) = c$



c عدد حقيقي

المجال	$R \quad (-\infty , \infty)$
المدى	$\{C\}$
المقطع	تقطع y عند النقطة $(0 , c)$
التماثل	متماثلة حول محور y
نوع الدالة	زوجية
الاتصال	متصلة
سلوك طرفي التمثيل	$\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$
فترات التزايد والتناقص	ثابتة في الفترة $(-\infty , \infty)$

2 الدالة المحايدة $f(x) = x$



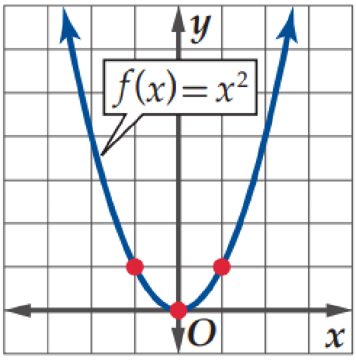
جميع النقاط الذي تمر بها الدالة إحداثياتها (a , a)

المجال	$R \quad (-\infty , \infty)$
المدى	$R \quad (-\infty , \infty)$
المقطع	تقطع محور x و y في $(0, 0)$
التماثل	متماثلة حول نقطة الأصل
نوع الدالة	فردية
الاتصال	متصلة
سلوك طرفي التمثيل	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
فترات التزايد والتناقص	متزايدة في الفترة $(-\infty , \infty)$

خصائص الدوال الرئيسة (الأم)

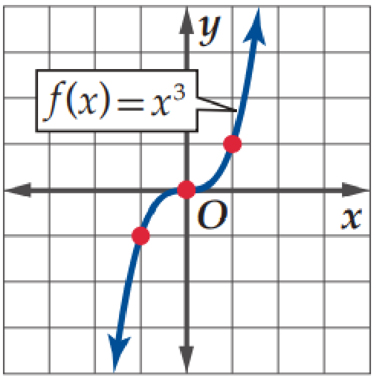
3 الدالة التربيعية $f(x) = x^2$

المجال	$R \quad (-\infty\,,\infty)$
المدى	$R^+ \quad [0\,,\infty)$
المقطع	تقطع محور x و y في $(0,0)$
التماثل	متماثلة حول محور y
نوع الدالة	زوجية
الاتصال	متصلة
سلوك طرفي التمثيل	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
فترات التزايد والتناقص	متناقصة في الفترة $(-\infty\,,0)$ متزايدة في الفترة $(0\,,\infty)$



4 الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$

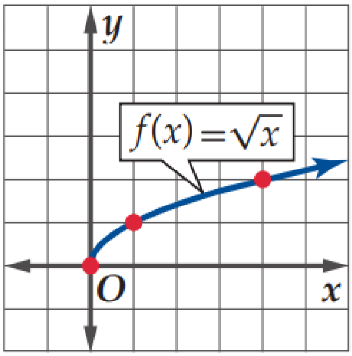
المجال	$R \quad (-\infty\,,\infty)$
المدى	$R \quad (-\infty\,,\infty)$
المقطع	تقطع محور x و y في $(0,0)$
التماثل	متماثلة حول نقطة الأصل
نوع الدالة	فردية
الاتصال	متصلة
سلوك طرفي التمثيل	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
فترات التزايد والتناقص	متزايدة في الفترة $(-\infty\,,\infty)$



خصائص الدوال الرئيسة (الأم)

5 دالة الجذر التربيعي $f(x) = \sqrt{x}$

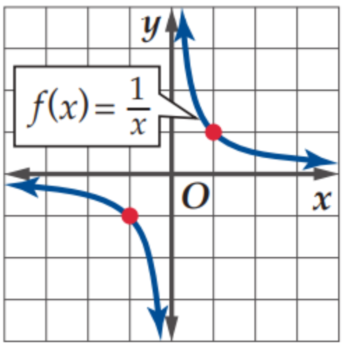
المجال	$R^+ \quad [0\,,\infty)$
المدى	$R^+ \quad [0\,,\infty)$
المقطع	تقطع محور x و y في $(0,0)$
التماثل	غير متماثلة
نوع الدالة	ليست زوجية وليست فردية
الاتصال	متصلة
سلوك طرفي التمثيل	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
فترات التزايد والتناقص	ثابتة في الفترة $(-\infty\,,\infty)$



$x \geq 0$

6 دالة المقلوب $f(x) = \frac{1}{x}$

المجال	$R - \{0\}$
المدى	$R - \{0\}$
المقطع	لا يوجد
التماثل	متماثلة حول نقطة الأصل
نوع الدالة	فردية
الاتصال	غير متصلة (لا نهائي)
سلوك طرفي التمثيل	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
فترات التزايد والتناقص	متناقصة في الفترة $(-\infty\,,0)\,,(0\,,\infty)$

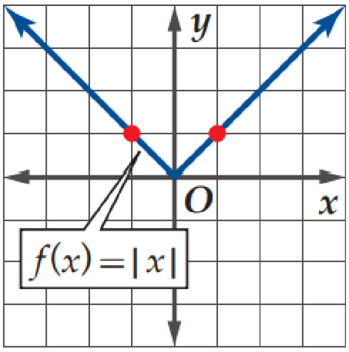


$x \neq 0$

خصائص الدوال الرئيسة (الأم)

7 دالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$

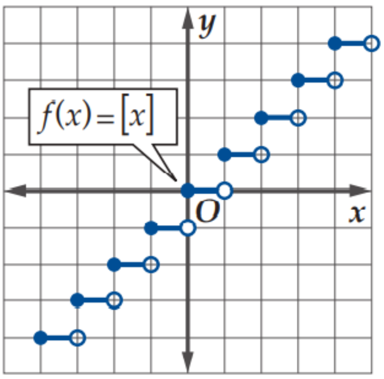
المجال	$R \quad (-\infty , \infty)$
المدى	$R^+ \quad [0 , \infty)$
المقطع	تقطع محور x و y في $(0, 0)$
التماثل	متماثلة حول محور y
نوع الدالة	زوجية
الاتصال	متصلة
سلوك طرفي التمثيل	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
فترات التزايد والتناقص	متناقصة في الفترة $(-\infty , 0)$ متزايدة في الفترة $(0 , \infty)$



$$f(x) = \begin{cases} -x , & x < 0 \\ x , & x \geq 0 \end{cases}$$

8 دالة أكبر عدد صحيح $f(x) = [x]$

المجال	$R \quad (-\infty , \infty)$
المدى	Z
المقطع	تقطع محور x و y في $(0, 0)$
التماثل	غير متماثلة
نوع الدالة	ليست زوجية وليست فردية
الاتصال	غير متصلة (قفزي)
سلوك طرفي التمثيل	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
فترات التزايد والتناقص	ثابتة عندما $x \notin Z$ متزايدة عندما $x \in Z$



أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x

دالة أكبر عدد صحيح هي أحد الأمثلة المشهورة على الدالة الدرجية .

التحويلات الهندسية

قياسية

تغير موقع المنحنى
ولا تغير أبعاده أو شكله .

غير قياسية

تغير موقع المنحنى
تغير شكل المنحنى .

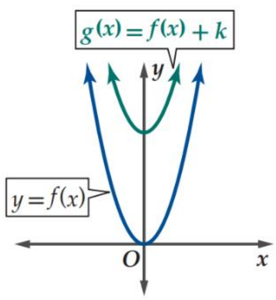
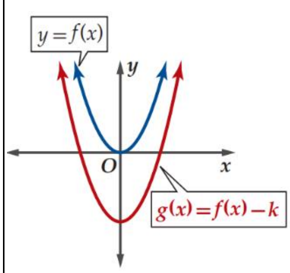
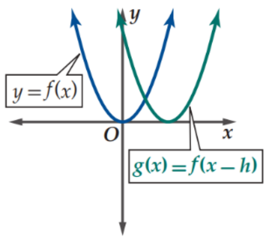
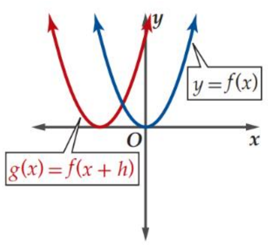
مثال

الانسحاب - الانعكاس

التمدد - تحويلات القيمة المطلقة

الانسحاب

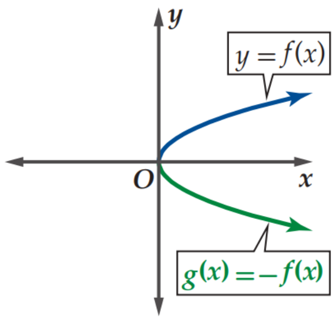
تحويل ينقل منحنى الدالة فالانسحاب الرأسي ينقل منحنى الدالة إلى أعلى أو أسفل ، بينما ينقل الانسحاب الأفقي منحنى الدالة إلى اليمين أو اليسار.

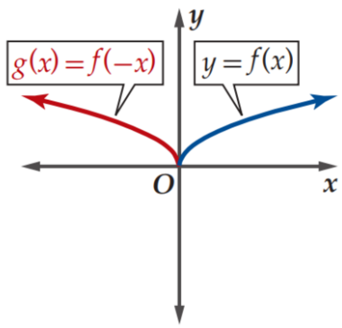
الانسحاب			
رأسي		أفقي	
$g(x) = f(x) + k$		$g(x) = f(x - h)$	
k خارج		h داخل	
أعلى $(+)$	أسفل $(-)$	يمين $(-)$	يسار $(+)$
$g(x) = f(x) + k$	$g(x) = f(x) - k$	$g(x) = f(x - h)$	$g(x) = f(x + h)$
			

الانعكاس

تحويل يكون لمنحنى الدالة صورة مرآة بالنسبة لمستقيم محدد .

الانعكاس	
الانعكاس حول محور x	الانعكاس حول محور y
(−) خارج	(−) داخل
$g(x) = -f(x)$	$g(x) = f(-x)$

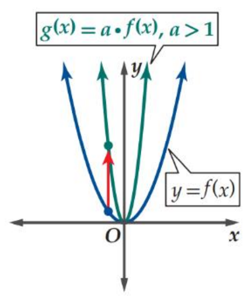


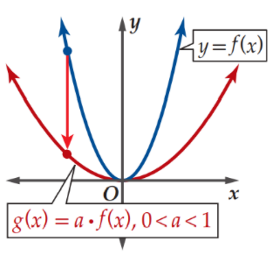


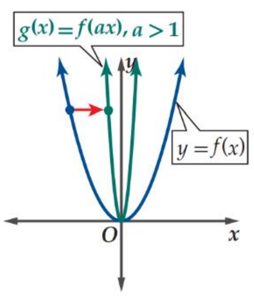
التمدد

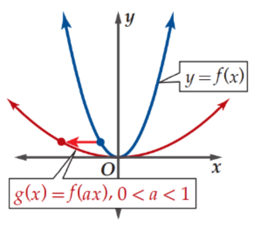
تحويل يؤدي إلى تضيق (ضغط) أو توسع (مط) منحنى الدالة .

التمدد			
رأسي		أفقي	
(a خارج الدالة)		(a داخل الدالة)	
$g(x) = a.f(x)$		$g(x) = f(a.x)$	
توسع	تضيق	توسع	تضيق
$a > 1$	$0 < a < 1$	$0 < a < 1$	$a > 1$
اتجاه الحركة			
↑ ↓	↓ ↑	← →	→ ←









التوسع الرأسي ≈ التضيق الأفقي ، التضيق الرأسي ≈ التوسع الأفقي

تمثيل الدوال متعددة التعريف بيانياً

يمكنك تمثيل الدالة المتعددة التعريف بيانياً باستعمال التحويلات الهندسية.

مثال

مثل الدالة بيانياً :

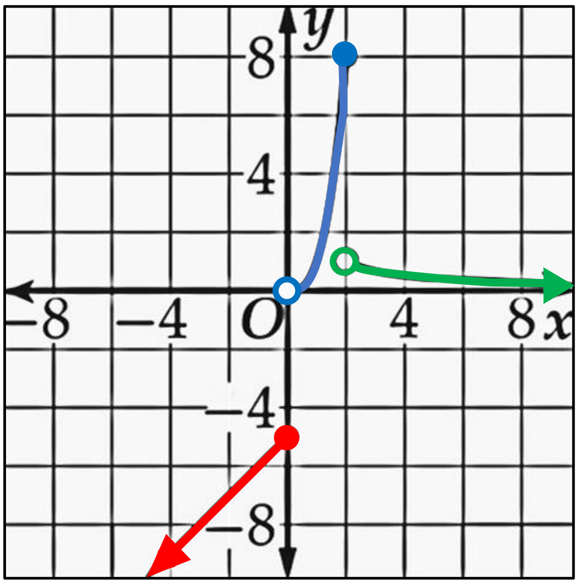
$$g(x) = \begin{cases} x - 5 & , \quad x \le 0 \\ x^3 & , \quad 0 < x \le 2 \\ \dfrac{2}{x} & , \quad x > 2 \end{cases}$$

الحل :

في الفترة $(-\infty, 0]$ ، أمثل الدالة $y = x - 5$

في الفترة $(0, 2]$ ، أمثل الدالة $y = x^3$

في الفترة $(2, \infty)$ ، أمثل الدالة $y = \frac{2}{x}$



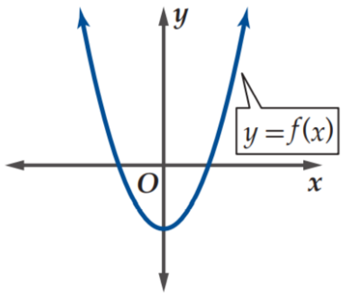
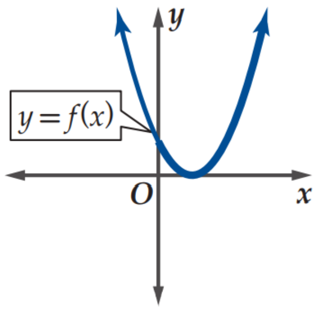
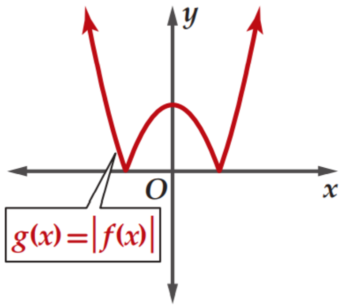
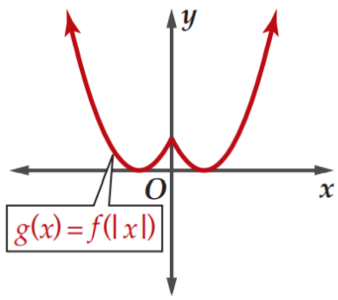
ضع دائرة مفتوحة عند

النقطة $(0\,,0)$ والنقطة $(2, 1)$

ضع دائرة مغلقة عند

النقطة $(0\,,-5)$ والنقطة $(2, 8)$

التحويلات الهندسية لدوال القيمة المطلقة

<table>
<tr><th colspan="2">القيمة المطلقة</th></tr>
<tr><th>خارج</th><th>داخل</th></tr>
<tr><td>$g(x) = | f(x) |$</td><td>$g(x) = f(|x|)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">الرسم قبل التحويل</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">الرسم بعد التحويل</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">طريقة الرسم</td></tr>
<tr><td>نعكس كل جزء موجود تحت محور x
ونجعله فوق محور x
ثم نزيل السابق .</td><td>نزيل الجزء الموجود يسار محور y
ثم نعكس المتبقي فقط حول محور y .</td></tr>
</table>

العمليات على الدوال

إذا كانت g , f دالتين يتقاطع مجالاهما ، فإننا نعرف عمليات الجمع ، والطرح ، والضرب والقسمة لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

الجمع : $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

الضرب : $(f.g)(x)=f(x).g(x)$

الطرح : $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

القسمة : $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\ , g(x)\neq 0$

إيجاد المجال

مجال $(f+g)(x)$ = مجال $f(x)$ $\cap$ مجال $g(x)$

مجال $(f-g)(x)$ = مجال $f(x)$ $\cap$ مجال $g(x)$

مجال $(f.g)(x)$ = مجال $f(x)$ $\cap$ مجال $g(x)$

مجال $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ = مجال $f(x)$ $\cap$ مجال $g(x)$ − أصفار المقام

مثال

$f(x)=x^2-6x-8 \quad , \quad g(x)=\sqrt{x}$

أوجد كلا من الدوال الآتية ، ثم حدد مجالها :

الحل :

مجال $f(x)$ هو R $(-\infty,\infty)$ و مجال $g(x)$ هو $[0,\infty)$

$(f.g)(x)=x^2\sqrt{x}-6x\sqrt{x}-8\sqrt{x}$

المجال : $[0,\infty)$

$(f+g)(x)=x^2-6x-8+\sqrt{x}$

المجال : $[0,\infty)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2-6x-8}{\sqrt{x}}$

المجال : $(0,\infty)$

$(f-g)(x)=x^2-6x-8-\sqrt{x}$

المجال : $[0,\infty)$

تركيب الدوال

تركيب الدوال يعني دمج دالتين ، وهذا الدمج لا ينتج من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة

وهو يعني إيجاد قيمة دالة عند دالة أخرى .

تركيب دالتين

يعرف تركيب الدالتين f و g على النحو الآتي:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

تقرأ الدالة $g \circ f$ على النحو f تركيب g أو f بعد g

حيث تطبق الدالة g أولًا ثم الدالة f

مثال

إذا كانت $g(x) = x - 4$ ، $f(x) = x^2 + 1$ فأوجد :

الحل :

1

$[f \circ g](x)$

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= f(x-4)$$
$$= (x-4)^2 + 1$$
$$= x^2 - 8x + 16 + 1$$
$$= x^2 - 8x + 17$$

2

$[g \circ f](x)$

$$[g \circ f](x) = g[f(x)]$$
$$= g(x^2 + 1)$$
$$= (x^2 + 1) - 4$$
$$= x^2 - 3$$

3

$[f \circ g](2) =$

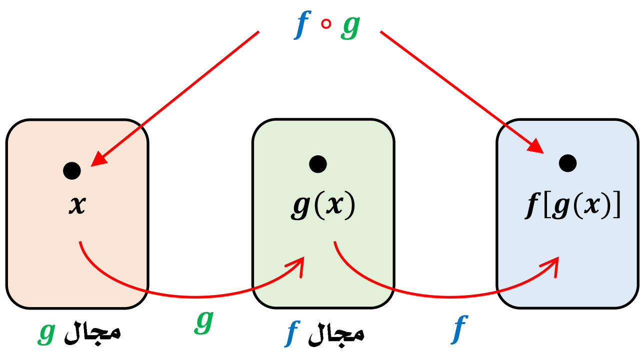
$$[f \circ g](x) = x^2 - 8x + 17$$
$$= (2)^2 - 8(2) + 17$$
$$= 5$$

مجال دالة التركيب

يتكون مجال الدالة $g \circ f$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f

نوجد مجالي الدالتين f و g قبل تركيبهما وعند وجود قيود على مجال f أو مجال g فإن مجال

$g \circ f$ يكون مقيداً بكل قيم x في مجال g التي تكون صورها $g(x)$ موجودة في مجال f



$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

ايجاد مجال دالة التركيب

نوجد مجال كلاً من الدالتين f , g

$R =$ ← مجال $g \circ f$ يساوي R

مجال $f \neq R$ أو مجال $g \neq R$ ← نوجد مجال $g \circ f$ قبل التبسيط

مثال

حدد مجال الدالة $g \circ f$ متضمناً القيود الضرورية ثم أوجد $g \circ f$ فيما يلي :

$$f(x) = \frac{5}{x} \quad , \quad g(x) = x^2 + x$$

الحل :

مجال $f(x)$ هو $R - \{0\}$

مجال $g(x)$ هو R

نوجد التركيب

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

$$= f[x^2 + x]$$

$$= \frac{5}{x^2 + x}$$

نوجد مجال $g \circ f$

الدالة كسرية إذن : المقام $\neq 0$

$$x^2 + x \neq 0$$

$$x(x+1) \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$$

المجال $\{x | x \neq 0, x \neq -1 , x \in R\}$

كتابة الدالة كتركيب دالتين

إحدى المهارات المهمة عند دراسة التفاضل والتكامل هي إعادة تفكيك الدالة إلى دالتين أبسط منها .

أي أنه لتفكيك دالة مثل h ، فإنك تجد دالتين g , f مثلًا بحيث يكون تركيبهما هو h .

$$h(x) = [f \circ g](x)$$

مثال

أوجد دالتين f, g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$ ، وعلى ألا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ فيما يلي :

$$h(x) = x^2 - 2x + 1$$

الحل :

بالتحليل إلى العوامل نكتب الدالة بالشكل :

$$h(x) = (x-1)(x-1)$$

$$h(x) = (x-1)^2$$

أي أنه يمكننا كتابة $h(x)$ كتركيب للدالتين :

$$g(x) = x - 1 \quad , \quad f(x) = x^2$$

وعندئذٍ :

$$h(x) = (x-1)^2$$

$$\boxed{g(x) = x - 1} \qquad \boxed{f(x) = x^2}$$

$$h(x) = [g(x)]^2 = f[g(x)] = [f \circ g](x)$$

العلاقات والعلاقات العكسية

يقال أن العلاقة A علاقة عكسية للعلاقة B إذا وفقط إذا كان الزوج المرتب (a , b) موجوداً في أحد العلاقتين ، فإن الزوج المرتب (b , a) موجودٌ في العلاقة الأخرى .

مثال :

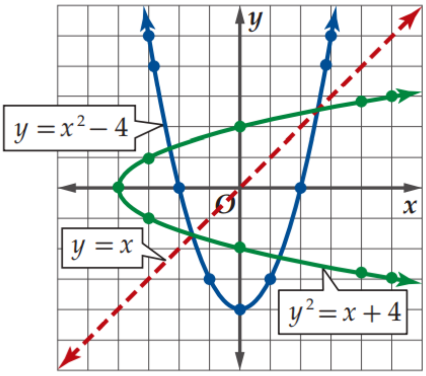
العلاقة $A = \{(1 , 5) , (2 , 10)\}$ هي علاقة عكسية لـ العلاقة $B = \{(5 , 1) , (10 , 2)\}$

وإذا مثلت العلاقة بمعادلة فيمكن إيجاد علاقتها العكسية بتبديل المتغير المستقل بالمتغير التابع .

العلاقة

$y = x^2 - 4$

x	y
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5



العلاقة العكسية

$x = y^2 - 4$

x	y
5	-3
0	-2
-3	-1
-4	0
-3	1
0	2
5	3

ملاحظة

كل علاقة من هاتين العلاقتين المتعاكستين

هي انعكاس للأخرى حول المستقيم $y = x$

الدالة العكسية

هي العلاقة العكسية لدالة f والتي تمثل دالة ، يرمز لها بالرمز f^{-1} .

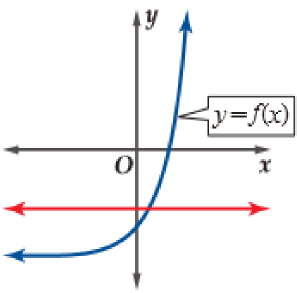
اختبار الخط الأفقي

يوجد لأي دالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر .

مثال :

بما أنه لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة

فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة .

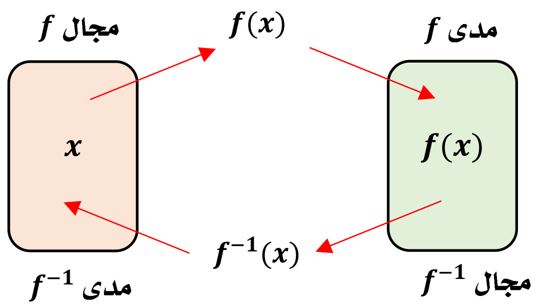


الدالة المتباينة

هي الدالة التي تحقق اختبار الخط الأفقي .

لأن كل قيمة لـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لـ y ، ولا توجد قيمة لـ y ترتبط بأكثر من قيمة لـ x .

إذا كانت الدالة متباينة فإن لها دالة عكسية .



إيجاد الدالة العكسية

الخطوة 1	التحقق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي .
الخطوة 2	ضع y مكان $f(x)$
الخطوة 3	بدل موقعي x , y
الخطوة 4	حل المعادلة بالنسبة للمتغير y
الخطوة 5	ضع $f^{-1}(x)$ مكان y

مثال

أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن .

$$f(x) = -16 + x^3$$

الحل :

الدالة متباينة باختبار الخط الأفقي

إذن يوجد دالة عكسية

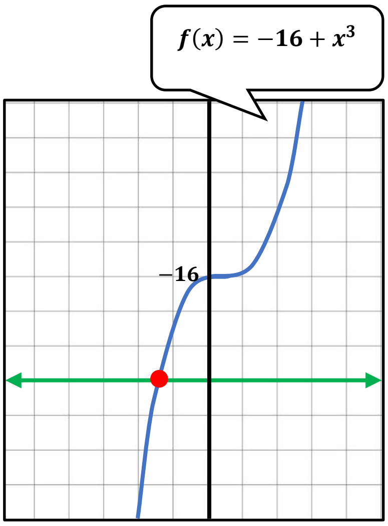
$$y = -16 + x^3$$

$$x = -16 + y^3$$

$$y^3 = x + 16$$

$$y = \sqrt[3]{x+16}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+16}$$



تركيب الدالة ودالتها العكسية

تكون كل من الدالتين f و f^{-1} دالة عكسية للأخرى ، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان :

1. $f[f^{-1}(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$

2. $f^{-1}[f(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f(x)$

مثال

أثبت جبريًا أن كلًا من الدالتين g , f تمثل دالة عكسية للأخرى :

$f(x) = 18 - 3x$, $g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

الحل :

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= f\left[6 - \frac{x}{3}\right]$$
$$= 18 - 3\left(6 - \frac{x}{3}\right)$$
$$= 18 - 18 + \frac{3x}{3}$$
$$= x$$

$$[g \circ f](x) = g[f(x)]$$
$$= g[18 - 3x]$$
$$= 6 - \frac{18 - 3x}{3}$$
$$= \frac{18 - 18 + 3x}{3}$$
$$= x$$

بما أن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$ فإن كلا الدالتين $g(x)$, $f(x)$ دالة عكسية للأخرى.

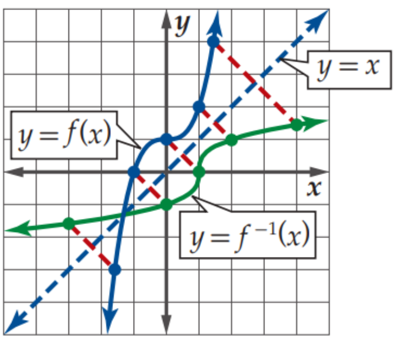
إيجاد الدالة العكسية بيانيًا

يمكننا تمثيل منحنى الدالة العكسية

بانعكاس الدالة الأصلية

حول المستقيم $y = x$

كما في المثال :



إذا كان للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية فإن الدالة تفشل في اختبار الخط الأفقي ومن ثم لا تكون دالة متباينة.

الفصل الثاني

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

الدالة الأسية

دالة يمكن وصفها بمعادلة على الصورة : $y = ab^x$

$a \neq 0 , b > 0 , b \neq 1$

أمثلة

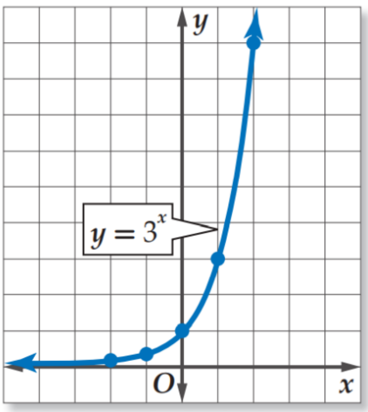
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $y = 4^x$ $y = 2(3)^x$

تمثيل الدالة الأسية

1 عندما $a > 0$, $b > 1$

تمثيل الدالة الأسية $y = 3^x$

x	$(3)^x$	y
-2	$(3)^{-2}$	$\frac{1}{9}$
-1	$(3)^{-1}$	$\frac{1}{3}$
0	$(3)^0$	1
1	$(3)^1$	3
2	$(3)^2$	9



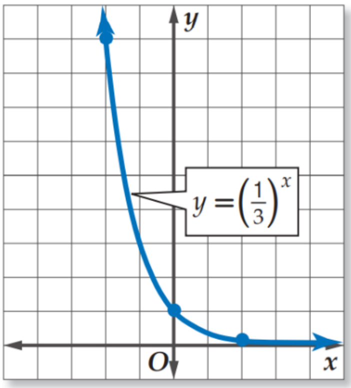
نوعها	تزايدية
المجال	R
المدى	R^+
المقطع y	$a = 1$
خط التقارب	محور x (خط أفقي)

تمثيل الدالة الأسية

2 عندما $a > 0$ ، $0 < b < 1$

تمثيل الدالة الأسية $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	y
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$	9
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^{0}$	1
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$	$\frac{1}{9}$

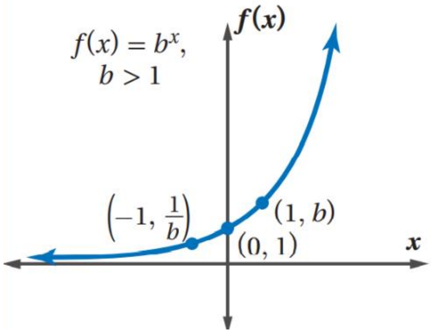
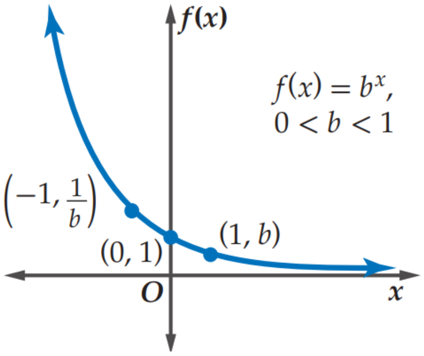


نوعها	تناقصية
المجال	R
المدى	R^+
المقطع y	$a = 1$
خط التقارب	(خط أفقي) محور x

ملاحظات

- إذا كانت $b < 0$ فإن $y = ab^2$ تكون غير معرفة عند بعض القيم ، فمثلًا تكون غير معرفة عند $x = \frac{1}{2}$
- إذا كانت $b = 1$ فإن الدالة تصبح على الصورة $y = a$ وهذه هي الدالة الثابتة .
- إذا كانت $a < 0$ أي قيمة a سالبة ، فإن منحنى الدالة ينعكس حول المحور x

الدوال الرئيسة " الأم " للدوال الأسية

الدوال الرئيسة " الأم " لدوال النمو الأسي	الدوال الرئيسة " الأم " لدوال الاضمحلال الأسي
صورتها	
$f(x) = b^x \quad , b > 1$	$f(x) = b^x \quad , \quad 0 < b < 1$
تمثيلها البياني	
	
خصائص منحى الدالة	
متصل – متباين – متزايد	متصل – متباين – متناقص
المجال	
مجموعة الأعداد الحقيقية R	مجموعة الأعداد الحقيقية R
المدى	
مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+
خط التقارب	
المحور x	المحور x
مقطع المحور y	
1	1

النمو الأسي

$$A(t) = a(1 + r)^t$$

t الفترة الزمنية ، a القيمة الابتدائية ، r النسبة المئوية للنمو

الأساس $(1 + r)$ يسمى عامل النمو.

تستعمل عادةً لتمثيل النمو السكاني .

مثال

بلغ المعدل السنوي للنمو السكاني في المملكة خلال الفترة $1425 - 1431$ 2% تقريبًا .

إذا كان عدد سكان المملكة 22678262 نسمة عام 1425هـ

أوجد معادلة أسية تمثل النمو السكاني للمملكة خلال هذه الفترة .

الحل :

$$y = a(1 + r)^t$$
$$y = 22678262(1 + 0.02)^t$$

الاضمحلال الأسي

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

t الفترة الزمنية ، a القيمة الابتدائية ، r النسبة المئوية للاضمحلال

الأساس $(1 - r)$ يسمى عامل الاضمحلال .

وتستعمل عادةً في التطبيقات المالية .

مثال

سيارة كان سعرها 80000 ريال ، ثم بدأ يتناقص بمعدل 15% كل سنة

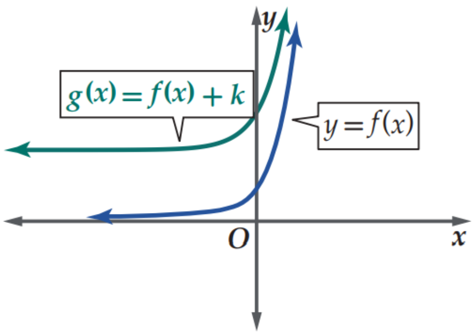
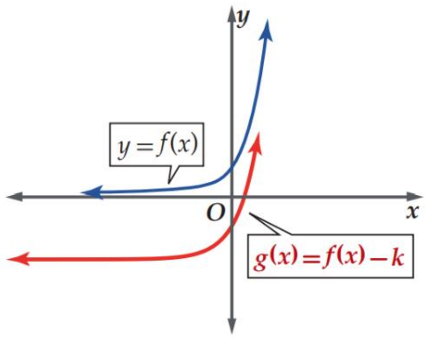
أوجد دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد t سنة من شرائها .

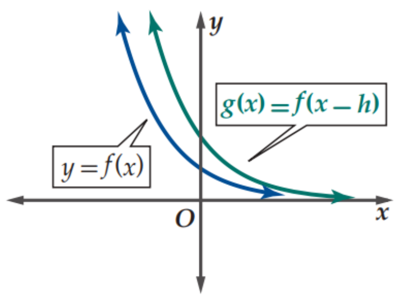
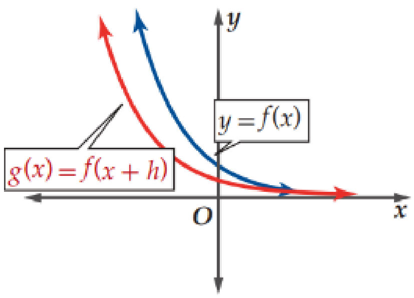
الحل :

$$y = a(1 - r)^t$$
$$y = 80000(1 - 0.15)^t$$

التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة (الأم)

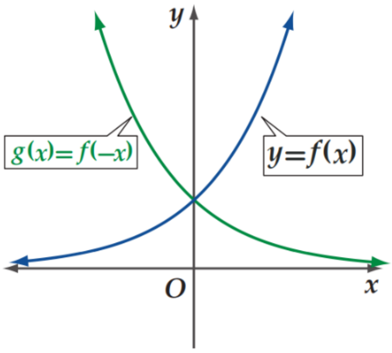
لدالتي النمو الأسي والاضمحلال الأسي

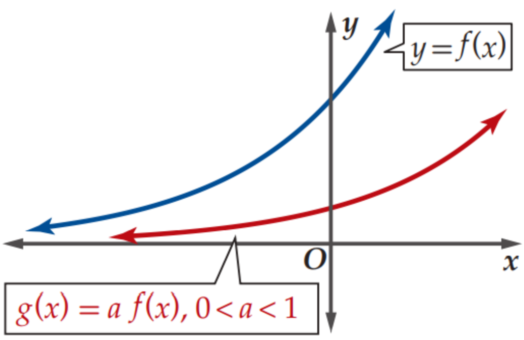
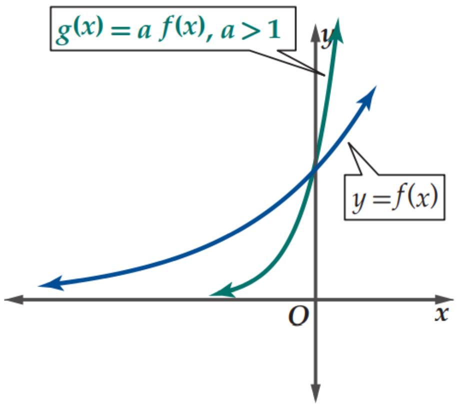
الانسحاب	
رأسي	
$g(x) = f(x) + k$	
k خارج	
أعلى$(+)$	أسفل$(-)$
$g(x) = f(x) + k$	$g(x) = f(x) - k$
	

الانسحاب	
أفقي	
$g(x) = f(x - h)$	
h داخل	
يمين $(-)$	يسار $(+)$
$g(x) = f(x - h)$	$g(x) = f(x + h)$
	

التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة (الأم)

لدالتي النمو الأسي والاضمحلال الأسي

الانعكاس
الانعكاس حول المحور y
$g(x) = f(-x)$


التمدد	
رأسي	
$g(x) = a.f(x)$	
تضيق	توسع
$0 < a < 1$	$a > 1$
	

الصورة الأصلية

$f(x) = b^x$

$f(x) = ab^x$

$a > 0$

$0 < b < 1$

مثال : $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

المدى

R^+ ، $(0, \infty)$

$\{ y |\, y > 0\}$

$b > 1$

مثال : $y = 2^x$

المدى

R^+ ، $(0, \infty)$

$\{ y |\, y > 0\}$

إيجاد مدى الدالة الأسية

الدالة متأثرة بالانسحاب

الدالة متأثرة بالانعكاس

الانسحاب الرأسي

للأعلى $(+)$	للأسفل $(-)$
$y = 2^x + 1$	$y = 2^{x+3} - 5$
المدى	
$\{y\|y > 1\}$	$\{y\|y > -5\}$
$y = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-5} + 3$	$y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 1$
المدى	
$\{y\|y > 3\}$	$\{y\|y > -1\}$

الانسحاب الأفقي لا يؤثر على المدى

حول محور x

$f(x) = -f(x)$

نغير اتجاه إشارة التباين $(<)$

$y = -2^x$

المدى

$\{y|y < 0\}$

$y = -4\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$

المدى

$\{y|y < 2\}$

الانعكاس حول محور y

لا يؤثر على المدى

المعادلة الأسية

هي معادلة تتضمن متغيرات في موقع الأس .

خاصية المساواة للدوال الأسية

إذا كان $b \neq 1$, $b > 0$ ، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$

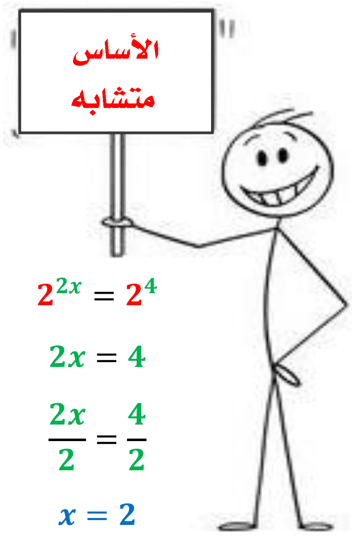
مثال: إذا كان $3^x = 3^5$ ، فإن $x = 5$ وإذا كان $x = 5$ ، فإن $3^x = 3^5$

مثال

حل كل معادلة مما يأتي :

$2^{2x} = 2^4$ $\qquad$ $2^x = 8^3$

الحل :



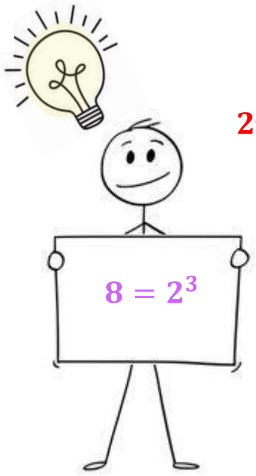
$$2^{2x} = 2^4$$

$$2x = 4$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$$

$$x = 2$$

$$2^x = 8^3$$



$$2^x = (2^3)^3$$

$$2^x = 2^9$$

$$x = 9$$

الربح المركب

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

A المبلغ الكلي بعد t سنة ، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال ، r معدل الربح السنوي المتوقع ، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة.

مثال

استثمر حسن مبلغ 70000 ريال متوقعًا ربحًا سنويًا نسبته 4.3% ، بحيث تضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر . ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 7 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين ؟

الحل :

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A = 70000\left(1+\frac{0.043}{12}\right)^{(12)(7)}$$

$$A \approx 94533.78$$

المتباينة الأسية هي متباينة تتضمن عبارة أسية أو أكثر ، حيث الأساس موجب.

حل المتباينات الأسية

لدالة النمو

إذا كان $b > 1$ ، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$

مثال: إذا كان $2^x > 2^6$ ، فإن $x > 6$ وإذا كان $x > 6$ ، فإن $2^x > 2^6$

لدالة الاضمحلال

إذا كان $0 < b < 1$ ، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

مثال: إذا كان $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$ ، فإن $x < 5$ وإذا كان $x < 5$ ، فإن $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$

مثال

حل المتباينة :

$$10^{5b+2} > 1000$$

الحل :

$$10^{5b+2} > 10^3$$

$$5b+2 > 3$$

$$5b > 1$$

$$b > \frac{1}{5}$$

حل المتباينة :

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \geq \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$$

الحل :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2(3t+5)} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{5(t-6)}$$

$$2(3t+5) \leq 5(t-6)$$

$$6t+10 \leq 5t-30$$

$$t \leq -40$$

$3^2 = 9$

$3^5 = 243$

اللوغاريتم للأساس b

اللوغاريتم : هو الأس y الذي يجعل المعادلة $x = b^y$ صحيحة .

فإذا كان b , x عددين موجبين و $b \neq 1$ تكتب على الصورة $y = \log_b x$

الصورة اللوغاريتمية	الصورة الأسية
$\log_b x = y$	$b^y = x$

$x , b > 0 , b \neq 1$

التحويل من ...

الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

$\log_4 16 = 2$

$4^2 = 16$

الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية

$125^{\frac{1}{3}} = 5$

$\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

مثال

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد قيمة ما يلي :

$\log_3 81$

الحل :

$\log_3 81 = y$

$3^y = 81$

$3^y = 3^4$

$y = 4$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $b > 0 , b \neq 1$

x عدد حقيقي فإن :

1

$\log_b 1 = 0$

التبرير :

$b^0 = 1$

مثال :

$\log_6 1 = 0$

2

$\log_b b = 1$

التبرير :

$b^1 = b$

مثال :

$\log_{10} 10 = 1$

3

$\log_b b^x = x$

التبرير :

$b^x = b^x$

مثال :

$\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

4

$b^{\log_b x} = x , x > 0$

التبرير :

$\log_b x = \log_b x$

مثال :

$3^{\log_3 1} = 1$

ملاحظات

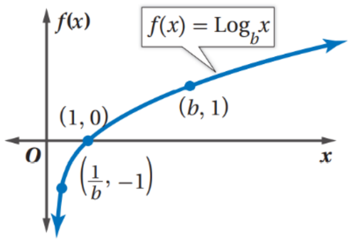
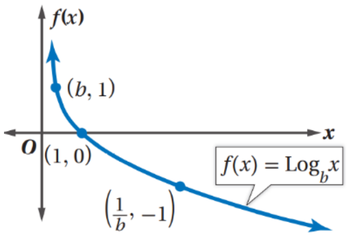
- لأي $b \neq 0$ فإن $b^0 = 1$
- $\log_b 0$ غير معرف لأن $b^x \neq 0$ لأي قيمة لـ x

الدالة اللوغاريتمية

هي دالة تكتب على الصورة : $f(x) = \log_b x$

حيث $b \neq 1$ و $b > 0 , x$

الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية

الدوال الرئيسة " الأم "	
صورتها	
$f(x) = \log_b x \quad , b > 1$	$f(x) = \log_b x \quad , 0 < b < 1$
تمثيلها البياني	
	
خصائص منحنى الدالة	
متصل – متباين – متزايد	متصل – متباين – متناقص
المجال	
مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+
المدى	
مجموعة الأعداد الحقيقية R	مجموعة الأعداد الحقيقية R
خط التقارب	
المحور y	المحور y
مقطع المحور x	
1	1

مثال

مثل الدالة $f(x) = \log_5 x$ بيانياً :

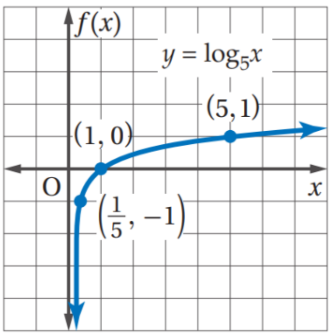
الحل :

-1	$\frac{1}{b}$
0	1
1	b

الأساس $b = 5 > 1$

-1	$\frac{1}{5}$
0	1
1	5

المنحنى متصل ومتزايد.



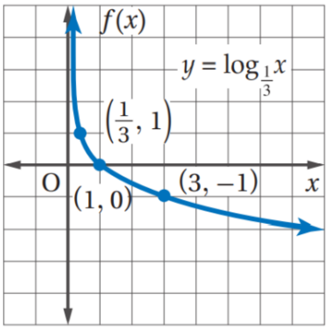
مثال

مثل الدالة $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ بيانياً :

الحل :

$\frac{1}{b}$	-1
1	0
b	1

الأساس $b = \frac{1}{3},\ 0 < \frac{1}{3} < 1$



3	-1
1	0
$\frac{1}{3}$	1

المنحنى متصل ومتناقص.

ملاحظة

يمكن تطبيق التحويلات الهندسية لتمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا تماماً كما في الدوال الأسية .

إيجاد الدوال العكسية للدوال الأسية

لابد أن تكون الدالة متباينة .

نستبدل x بـ y والعكس .

نحول الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية ونجعل y في طرف .

مثال

أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 0.5^x$

الحل :

$y = 0.5^x$ متباينة فإن لها دالة عكسية

$$x = 0.5^y$$

$$y = \log_{0.5} x$$

خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية

إذا كان b عدداً موجباً حيث $b \neq 1$ ، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$ ، فإن $x = 8$ ، وإذا كان $x = 8$ فإن $\log_5 x = \log_5 8$

خصائص اللوغاريتمات

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله .

إذا كانت x , y, b أعداداً حقيقية موجبة حيث $b \neq 1$

$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$

مثال :

استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$

الحل :

$\log_4 32 = \log_4 (16 \times 2)$

$= \log_4 (4^2 \times 2)$

$= \log_4 4^2 + \log_4 2$

$= 2 + 0.5$

$= 2.5$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحاً منه لوغاريتم المقسوم عليه.

إذا كانت x , y, b أعداداً حقيقية موجبة حيث $b \neq 1$

$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

مثال:

استعمل $\log_3 2 \approx 0.63$ لتقريب قيمة $\log_3 4.5$

الحل :

$\log_3 4.5 = \log_3 \left(\frac{9}{2}\right)$

$= \log_3 9 - \log_3 2$

$= \log_3 3^2 - \log_3 2$

$= 2 - 0.63$

$= 1.37$

خاصية لوغاريتم القوة

لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.

لأي عدد حقيقي m وأي عددين موجبين x , b حيث $b \neq 1$

$\log_b x^m = m \log_b x$

مثال:

استعمل $\log_3 7 \approx 1.7712$ فقرب قيمة $\log_3 49$

الحل :

$\log_3 49 = \log_3 (7)^2$

$= 2 \log_3 7$

$= 2\ (1.7712)$

$= 3.5424$

ملاحظة

لوغاريتم المجموع أو الفرق لا يساوي مجموع أو فرق اللوغاريتمات .

$$\log_a(x \pm 4) \neq \log_a x \pm \log_a 4$$

تبسيط العبارات اللوغاريتمية

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، احسب قيمة $\log_6 \sqrt[3]{36}$

الحل :

بما أن الأساس 6 نعبر عن $\sqrt[3]{36}$ على صورة قوة 6

$$\log_6 \sqrt[3]{36} = \log_6 36^{\frac{1}{3}}$$

$$= \log_6 (6^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \log_6 (6)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{3}\log_6 6$$

$$= \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}$$

كتابة العبارات اللوغاريتمية

مثال

الصورة المطولة

اكتب العبارة بالصورة المطولة :

$$\log_{13} 6a^3bc^4$$

الحل :

$$= \log_{13} 6 + \log_{13} a^3 + \log_{13} b + \log_{13} c^4$$

$$= \log_{13} 6 + 3\log_{13} a + \log_{13} b + 4\log_{13} c$$

الصورة المختصرة

اكتب العبارة بالصورة المختصرة :

$$= -5\log_2 (x+1) + 3\log_2 (6x)$$

الحل :

$$= \log_2 (x+1)^{-5} + \log_2 (6x)^3$$

$$= \log_2 (x+1)^{-5}(6x)^3$$

$$\log_2 \frac{(6x)^3}{(x+1)^5}$$

$$\log_2 \frac{216x^3}{(x+1)^5}$$

حل المعادلات اللوغاريتمية

1
تحتوي على لوغاريتم واحد .
تحول إلى الصيغة الأسية ثم نوجد الحل .

مثال

حل المعادلة $\log_9 x = \frac{3}{2}$

الحل :

$$9^{\frac{3}{2}} = x$$

$$(3)^{2\left(\frac{3}{2}\right)} = x$$

$$x = 27$$

2
تحتوي على لوغاريتمات في كلا الطرفين .
تستخدم خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية للمساواة
ثم نوجد الحل مع استبعاد الحلول الدخيلة .

مثال

حل المعادلة $\log_2 x^3 = \log_2 8$

الحل :

$$x^3 = 8$$

$$x^3 = 2^3$$

$$x = 2$$

3
تحتوي على أكثر من لوغاريتم في الطرف الواحد .
نختصرها باستخدام خصائص اللوغاريتمات ثم تحول
إلى الصورة الأسية ونوجد الحل مع استبعاد الحلول الدخيلة .

مثال

حل المعادلة $2\log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$

الحل :

$$\log_7 x^2 = \log_7 (27)(3)$$

$$x^2 = 81$$

$$x = \pm 9$$

$x = 9$ و نستبعد $x = -9$ لأنه لا يوجد لوغاريتم لعدد سالب .

حل المتباينات اللوغاريتمية

1

تحتوي على لوغاريتم واحد .

إذا كان $b > 1$, $x > 0$ و $\log_b x > y$

فإن $x > b^y$

مثال

أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_4 x \geq 3$

الحل :

$$x \geq 4^3$$

$$x \geq 64$$

مجموعة الحل :

$$\{x |\ x \geq 64\ , x \in R\}$$

عند حل متباينة لوغاريتمية يستثنى قيم المتغير التي لا يكون اللوغاريتم عندها معرفًا

2

تحتوي على لوغاريتمات في كلا الطرفين .

إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$

إذا وفقط إذا كان $x > y$

مثال

أوجد مجموعة حل المتباينة

$$\log_8(2x) > \log_8(6x - 8)$$

الحل :

1

$$2x > 6x - 8$$

$$-4x > -8$$

$$\frac{-4x}{-4} < \frac{-8}{-4}$$

$$x < 2$$

2

لتحديد الفترة كاملة

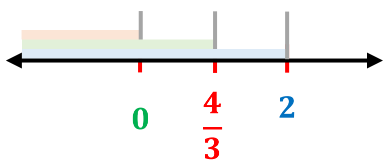
- $2x \leq 0$

$x \leq 0$

- $6x - 8 \leq 0$

$6x \leq 8$

$x \leq \frac{4}{3}$



3

مجموعة الحل :

$$\left\{x \middle|\ \frac{4}{3} < x < 2\ , x \in R\right\}$$

اللوغاريتمات العشرية

هو لوغاريتم أساسه 10

تكتب دون كتابة الأساس 10

$$\log_{10} x = \log x \;,\;\; x > 0$$

إيجاد قيمة اللوغاريتم العشري

تحتوي معظم الحاسبات العلمية $\log\ x$ كونه أمرًا أساسيًا

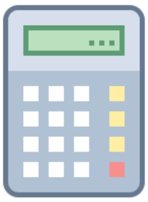
ويستعمل المفتاح LOG لإيجاد قيمته.

مثال

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة ما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف .

$\log 7$

الحل :



اضغط على المفاتيح : = ENTER 7 LOG

$$\log 7 \approx 0.8451$$

خصائص اللوغاريتمات العشرية

1	$10^y = x$	$\log x = y$
2	$10^0 = 1$	$\log 1 = 0$
3	$10^1 = 10$	$\log 10 = 1$
4	$10^m = 10^m$	$\log 10^m = m$

حل معادلات أسية باستعمال اللوغاريتم العشري

إذا كان من الصعب كتابة طرفي المعادلة الأسية بدلالة الأساس نفسه ، فإنه يمكنك حلها بأخذ اللوغاريتم العشري لكلا الطرفين .

مثال

حل المعادلة $3^x = 15$ وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف .

الحل :

$$3^x = 15$$

$$\log 3^x = \log 15$$

$$x \log 3 = \log 15$$

$$x = \frac{\log 15}{\log 3}$$

$$x \approx 2.4650$$

حل متباينات أسية باستعمال اللوغاريتم العشري

يمكن استعمال استراتيجيات حل المعادلات الأسية لحل متباينات أسية .

مثال

أوجد مجموعة حل المتباينة $3^{2x} \geq 6^{x+1}$

وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف .

الحل :

$$\log 3^{2x} \geq \log 6^{x+1}$$

$$2x \log 3 \geq (x+1) \log 6$$

$$2x \log 3 \geq x \log 6 + \log 6$$

$$2x \log 3 - x \log 6 \geq \log 6$$

$$x(2 \log 3 - \log 6) \geq \log 6$$

$$x \geq \frac{\log 6}{2 \log 3 - \log 6}$$

$$\{x | x \geq 4.4190 , x \in R\}$$

عند الضرب أو القسمة على عدد سالب يتغير اتجاه إشارة التباين . لذا لابد قبل القسمة على المقدار $2 \log 3 - \log 6$ معرفة إذا كان موجبًا أم سالبًا .

هنا المقدار موجب لذا تبقى إشارة التباين كما هي .

صيغة تغيير الأساس

هي صيغة تستخدم لكتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة لأخرى بأساس مختلف .

لأي أعداد موجبة n, b, a ، حيث $a \neq 1$ ، $b \neq 1$

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

لوغاريتم العدد الأصلي للأساس b ← $\log_b n$

لوغاريتم الأساس القديم للأساس b ← $\log_b a$

مثال :

$$\log_3 11 = \frac{\log_5 11}{\log_5 3}$$

مثال

اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري ، ثم أوجد قيمته مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف .

الحل :

$$\log_6 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 6} = \frac{\log 8}{\log 6}$$

$$\approx 1.1606$$