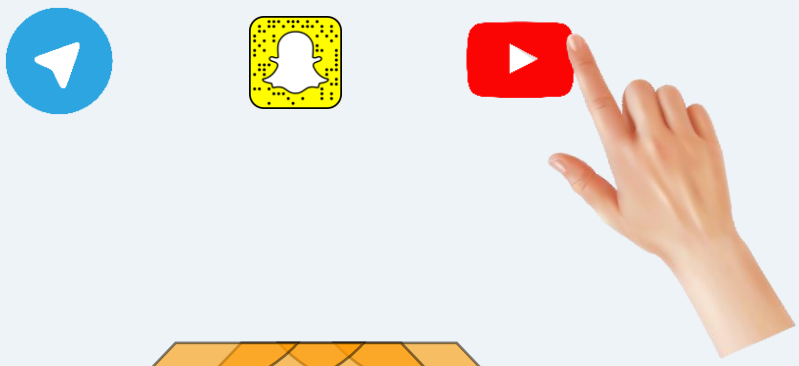
تم تحميل وعرض هذا المادة من موقع واجبي:

واجبي

www.wajibi.net

اشترك معنا ليصلك كل جديد:



# رياضيات 3

## الفصل الدراسي الثالث

اسم الطالب/ـة :.....

الصف :.....

إعداد المعلمتان:

أ. هياء ناصر الجنوبي

أ.وفاء علوي باعقيل

| م | التاريخ | الدرجة | الملاحظات | التوقيع |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | | | | |
| 8 | | | | |
| 9 | | | | |
| 10 | | | | |
| 11 | | | | |
| 12 | | | | |
| 13 | | | | |
| 14 | | | | |
| 15 | | | | |
| 16 | | | | |
| 17 | | | | |

# الفصل السادس

# الإحداثيات القطبية و الأعداد المركبة

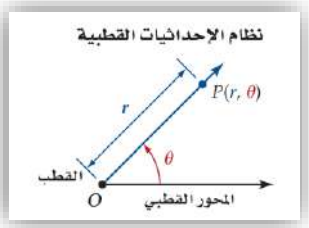
- الإحداثيات القطبية.
- الصورة القطبية والصورة الديكارتيةللمعادلات.
- الأعداد المركبة ونظرية ديمو افر.

## 1 تمثيل الاحداثيات القطبية

**القطب**
هو نقطة الأصل O
نقطة ثابتة

**المحور القطبي**
نصف مستقيم يمتد أفقيا
من القطب إلى اليمين

تعيين موقع نقطة P في نظام الاحداثيات القطبية باستعمال الإحداثيات $(\theta, r)$
حيث : $r$ المسافة المتجهة
$\theta$ الزاوية المتجهة




تحقق من فهمك : صـ 269ـ

مثل كل نقطة من النقاط التالية:

(1A $D\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$

(1B $E\ (2.5, 240°)$

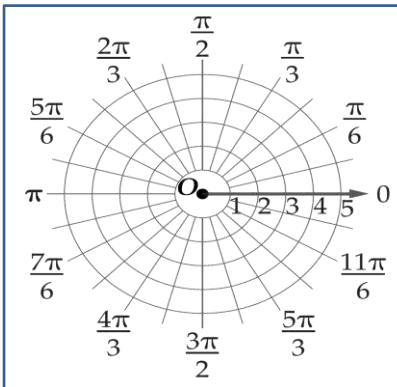
(1C $F\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$

## 2 تمثيل النقاط في المستوى القطبي:

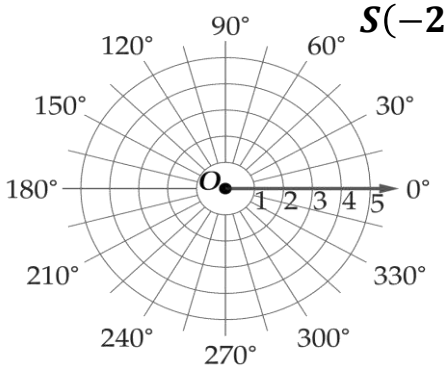
تحقق من فهمك : صـ 269ـ

مثل كل نقطة من النقاط التالية في المستوى القطبي:

(2A $R\left(1.5, \frac{7\pi}{6}\right)$




(2B $S(-2, -135°)$



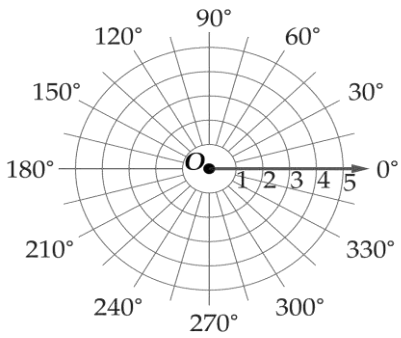

تدرب: صـ 272ـ

مثل كل نقطة من النقاط التالية في المستوى القطبي:

(1 $R(1, 120°)$

(2 $T(-2.5, 330°)$

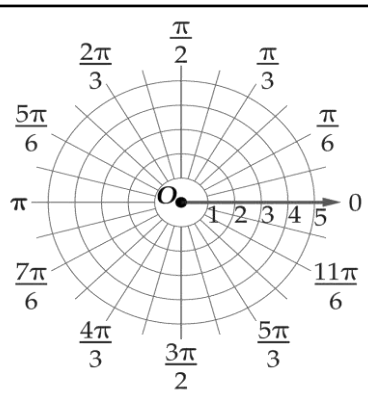
(5 $B(5, -60°)$



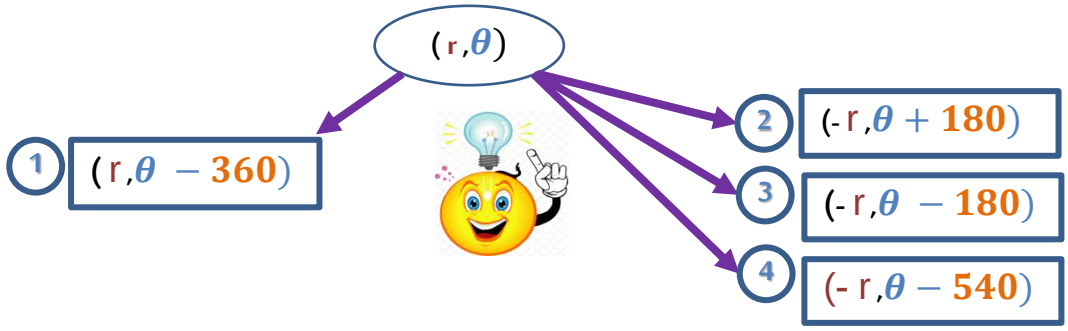

(3 $F\left(-2, \frac{2\pi}{3}\right)$

(4 $A\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$

(6 $D\left(-1, \frac{5\pi}{3}\right)$



## 3 تمثيلات قطبية متعددة:




**تحقق من فهمك : صـ 270ـ**

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثل إحداثيين قطبيين للنقطة المعطاه ، علما بأن :
$-2\pi \le \theta \le 2\pi \, , -360° \le \theta \le 360$

3A) $(5 \, , 240°)$

3B) $\left(-2 \, , \frac{\pi}{6}\right)$

**تدرب: صـ 272ـ**

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثل إحداثيين قطبيين للنقطة المعطاه ، علما بأن :
$-2\pi \le \theta \le 2\pi \, , -360° \le \theta \le 360$

12) $(1 \, , 150°)$

15) $\left(-3 \, , \frac{2\pi}{3}\right)$

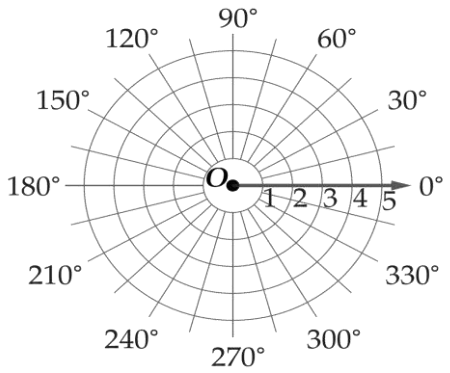
## 4 التمثيل البياني للمعادلات القطبية

التمثيل البياني لمعادلة قطبية إما تكون دائرة أو خط مستقيم حيث :

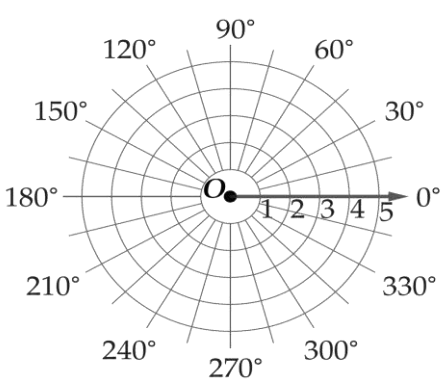
- التمثيل البياني لـ $r$ هو دائرة مركزها القطب وطول نصف قطرها $|r|$.
- التمثيل البياني لـ $\theta$ هو مستقيم يصنع زاوية مع محور القطب.

**تحقق من فهمك : صـ 271ـ** مثل كل معادلة من المعادلات القطبية التالية بيانياً:

(4A $r = 3$

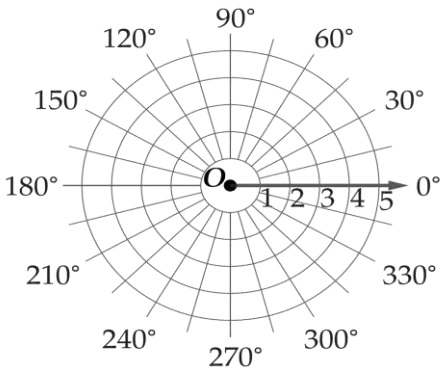



(4B $\theta = \frac{2\pi}{3}$

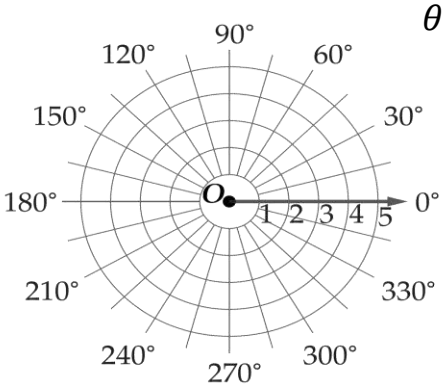


**تدرب: صـ 272ـ** مثل كل معادلة من المعادلات القطبية التالية بيانياً:

(20 $r = 2.5$

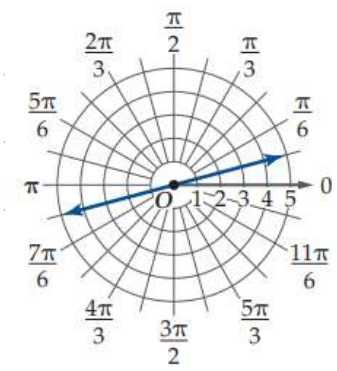



(21 $\theta = 225°$

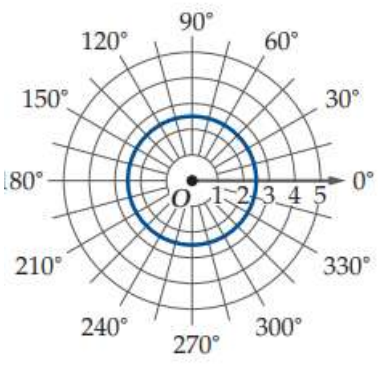


**تدرب: صـ 273ـ** اكتب المعادلة لكل تمثيل قطبي مما يلي:

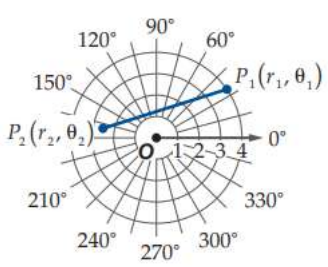
(52




(53



## 5 المسافة بالصيغة القطبية:



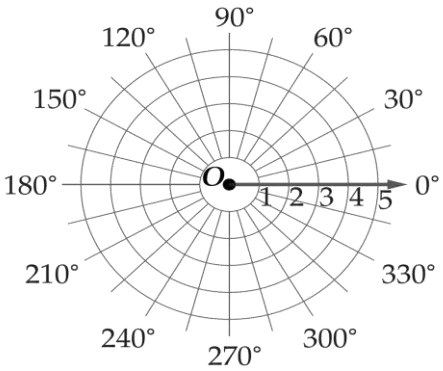
افترض أن $P_1(r_2,\theta_2), P_2(r_2,\theta_2)$ نقطتان في المستوى القطبي، تعطى المسافة بالصيغة :

$$P_1\ P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2\, r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

**تحقق من فهمك : صـ 271ـ**

5) قوارب : يرصد رادار بحري حركة قاربين ، إذا كانت إحداثيات موقعي القاربين : $(3\ ,65°)$ , $(8,150°)$ حيث $r$ بالأميال.

**5A ) مثل هذا الموقف في المستوى القطبي.**




**5B ) ما المسافة بين القاربين؟**

**تدرب: صـ 272ـ**

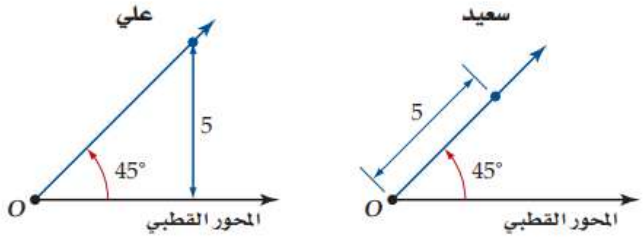
أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط التالية:

**25 ) $(2,30°)$ , $(5\ ,120°)$**

**26 ) $(3,\frac{\pi}{2})$ , $(8\ ,\frac{4\pi}{3})$**

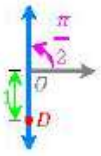
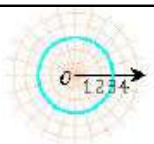
مهارات التفكير العليا: صـ 274ـــ

58)اكتشف الخطأ : قام كل من سعيد وعلي بتمثيل النقطة في المستوى القطبي كما هو مبين أدناه . أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برر إجابتك .




الواجب:

## تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | تمثيل النقطة D في الشكل هو  | | | | |
| | A | $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ | | B | $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ |
| | C | $(-1,\pi)$ | | D | $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ |
| 2 | تمثيل النقطة $(2,50°)$ في المستوى القطبي هو نفسه تمثيل النقطة: هو | | | | |
| | A | $(50,0°)$ | | B | $(2,130°)$ |
| | C | $(-2,-50°)$ | | D | $(-2,230°)$ |
| 3 | أي النقاط التالية يعد تمثيلا آخر للنقطة $\left(-2,\frac{7\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي ؟ | | | | |
| | A | $\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$ | | B | $\left(-2,\frac{\pi}{6}\right)$ |
| | C | $\left(2,\frac{-11\pi}{6}\right)$ | | D | $\left(-2,\frac{11\pi}{6}\right)$ |
| 4 | الشكل يمثل المعادلة القطبية:  | | | | |
| | A | $r=2$ | | B | $r=3$ |
| | C | $r=4$ | | D | $r=6$ |
| 5 | المعادلة القطبية $r=4$ تمثيلها البياني عبارة عن دائرة طول قطرها .. | | | | |
| | A | 2 | | B | 3 |
| | C | 4 | | D | 8 |
| 6 | التمثيل البياني للمعادلة القطبية $\theta=30°$ عبارة عن .. | | | | |
| | A | دائرة قطرها 15 | | B | دائرة قطرها 30 |
| | C | مستقيم ميله $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | D | مستقيم ميله $\sqrt{3}$ |
| 7 | المسافة بين النقطتين $P_1=(0,40°)$ , $P_2=(3,60°)$ | | | | |
| | A | 0 | | B | 3 |
| | C | 40 | | D | 60 |

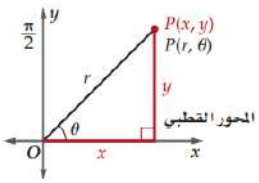
تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | إذا كانت المسافة بين النقطتين $p_1=(r,0°), p_2=(4,90°)$ تساوي 5 وحدات، فما قيمة r ؟ | | | | |
| | A | 1 | | B | 2 |
| | C | 3 | | D | 4 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | أي المتجهات الآتية يمثل $\overrightarrow{RS}$ حيث إن نقطة البداية $R(-5,3)$ ونقطة النهاية $S(2,-7)$ ؟ | | | | |
| | A | $\langle 7,-10\rangle$ | | B | $\langle -3,10\rangle$ |
| | C | $\langle -3,10\rangle$ | | D | $\langle -3,-10\rangle$ |

## 1 تحويل الاحداثيات القطبية إلى الاحداثيات ديكارتية

$(r\ ,\theta) \longrightarrow (x\ ,y)$



$$(x\ ,y\ ) = (\ r\ cos\ \theta\ ,r\ sin\ \theta)$$

$$x = \mathrm{r}\cos\theta \qquad y = sin\theta$$

**تحقق من فهمك : صـ 276ـ** حول الاحداثيات القطبية إلى احداثيات ديكارتية لكل نقطة مما يأتي:

**1A)** $R(-6, 120°)$

**1B)** $S\left(5\ ,\frac{\pi}{3}\right)$

**1C)** $T(-3, 45°)$

**تدرب: صـ 281ـ** حول الاحداثيات القطبية إلى احداثيات ديكارتية لكل نقطة مما يأتي:

**1)** $\left(2\ ,\frac{\pi}{4}\right)$

**3)** $(5\ ,240°)$

## 2 تحويل الاحداثيات الديكارتية إلى الاحداثيات القطبية

$(x, y) \longrightarrow (r, \theta)$

**لإيجاد r**

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

**لإيجاد θ**

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

- $x > 0$ : $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$
- $x < 0$ : $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + 180°$
- $x = 0$
  - $y < 0$ : $\theta = 270°$
  - $y > 0$ : $\theta = 90°$

**تحقق من فهمك : صـ 277ـ**

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاه بالإحداثيات الديكارتيةفي كل مما يأتي:

(2A $V(8, 10)$

(2B $W(-9, -4)$

**تدرب: صـ 281ـ**

حول الاحداثيات الديكارتية إلى احداثيات قطبية لكل نقطة مما يأتي:

(11 $(7, 10)$

(12 $(-13, 4)$

## 3 التحويل بين الاحداثيات

تحقق من فهمك : صـ 278ـ

3) صيد الأسماك : يستعمل جهاز رصد لتحديد مزقع وجود الأسماك تحت الماء، افترض أن قاربا يتجه إلى الشرق ، وأن جهاز الرصد قد رصد سربا من الأسماك عند النقطة $(6, 125°)$

A) ما الإحداثيات الديكارتية لموقع سرب الأسماك؟

.....

.....

.....

B) إذا كان موقع سرب الأسماك قد رُصد سابقا عند النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(6, -2)$ فما الإحداثيات القطبية لموقع السرب؟

.....

.....

.....

## 4 تحويل المعادلات الديكارتية إلى المعادلات القطبية

تحقق من فهمك : صـ 279ـ

أكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

4A) $x^2 + (y-3)^2 = 9$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4B) $x^2 - y^2 = 1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تدرب: صـ 281ـ

أكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

24) $x = -2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

28) $(x-2)^2 + y^2 = 4$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 5 تحويل المعادلات القطبية إلى المعادلات الديكارتية

عدد = $r$ نربع الطرفين

عدد = $\theta$ نأخذ $\tan\theta$ الطرفين

دالة مثلثية = $r$ نضرب الطرفين في $r$

**تحقق من فهمك : صـ 280ـ**

أكتب كل معادلة قطبية مما يأتي على الصورة الديكارتية:

(5A $r = -3$

(5B $\theta = \frac{\pi}{3}$

(5C $r = 3\cos\theta$

**تدرب: صـ 281ـ**

أكتب كل معادلة قطبية مما يأتي على الصورة الديكارتية:

(32 $r = 3\sin\theta$

(34 $r = 10$

(36 $\tan\theta = 4$

مهارات التفكير العليا: صـ 282ـ

58)اكتشف الخطأ : يحاول كل من باسل وتوفيق كتابة المعادلة القطبية $r = sin\ \theta$ على الصورة الديكارتية فيعتقد توفيق أن الحل هو $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ في حين يعتقد باسل أن الحل هو $y = sin\ x$ أيهما كانت اجابته صحيحة؟

61) برهان: استعمل $x = cos\ \theta$ , $y = sin\ \theta$ لإثبات أن :

$$r = csc\ \theta \text{ , } r = x\ sec\ \theta$$

حيث: $sin\ \theta \neq 0$ ,$cos\ \theta \neq 0$

الواجب:

تحصيلي رياضيات

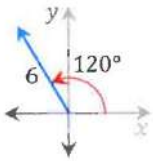
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | الصورة القطبية للمعادلة : $y^2 = x$ | | | | |
| | A | $r = cot\theta\ csc\theta$ | | B | $r = tan\theta\ sec\theta$ |
| | C | $r = sin\theta\ sec\theta$ | | D | $r = cot\theta\ sin\theta$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | المعادلة الديكارتية $x = 2$ بالصيغة القطبية: | | | | |
| | A | $r = 2cos\theta$ | | B | $r = 2sin\theta$ |
| | C | $r = 2sec\theta$ | | D | $r = 2tan\theta$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | الاحداثيات الديكارتية للنقطة $\mathbf{T}(-4,60°)$ هي: | | | | |
| | A | $(-2, -2\sqrt{3})$ | | B | $(-2\sqrt{3}, -2)$ |
| | C | $(2,2\sqrt{3})$ | | D | $(2\sqrt{3}, 2)$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | إذا كان $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ الإحداثي القطبي للنقطة $p$ فما الإحداثي الديكارتي لها؟ | | | | |
| | A | $\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ | | B | $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$ |
| | C | $\left(10, \frac{10}{\sqrt{3}}\right)$ | | D | $\left(\frac{10}{\sqrt{3}}, 10\right)$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | إذا كان للنقطة $\boldsymbol{p}$ الإحداثيات الديكارتية $(3, 3\sqrt{3})$ فإن الإحداثيات القطبية $(r, \theta)$ للنقطة $\boldsymbol{p}$ هي: | | | | |
| | A | $(6, 60°)$ | | B | $(6, 30°)$ |
| | C | $(3, 90°)$ | | D | $(6, 45°)$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | أي العبارات التالية تمثل المتجه في الصورة الديكارتية؟   | | | | |
| | A | $(-3, -3\sqrt{3})$ | | B | $(-3, 3\sqrt{3})$ |
| | C | $(3, -3\sqrt{3})$ | | D | $(3, 3\sqrt{3})$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | الصورة الديكارتية للمعادلة القطبية $x^2 - y^2 = 3$ هي: | | | | |
| | A | $r = 3\cos 2\theta$ | | B | $r^2 = 3\sec 2\theta$ |
| | C | $r^2 = \frac{3}{\sec 2\theta}$ | | D | $r^2 = \frac{3}{\csc 2\theta}$ |

تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | الصورة الديكارتية للمعادلة القطبية: $r = 4\sin\theta$ هي : | | | | |
| | A | $x + y = 3x$ | B | $x^2 + y^2 = 4y$ | |
| | C | $x^2 + y^2 = 4x$ | D | $x^2 = 4y^2$ | |

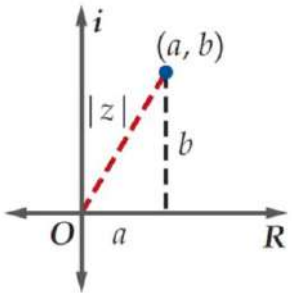
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | أي من النقاط الآتية يعد تمثيلا أخر للنقطة $(-2, \frac{7\pi}{6})$ في المستوى القطبي؟ | | | | |
| | A | $(2, \frac{\pi}{6})$ | B | $(-2, \frac{\pi}{6})$ | |
| | C | $(2, \frac{-11\pi}{6})$ | D | $(-2, \frac{11\pi}{6})$ | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | إذا كان: $n = \langle -7,3 \rangle, m = \langle 5, -4 \rangle$ فأي مما يأتي يمثل $k$ ، حيث $k = n - 2m$ ؟ | | | | |
| | A | $(-17, 11)$ | B | $(-17, -5)$ | |
| | C | $(17, -11)$ | D | $(-17, 5)$ | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | ما الصورة القطبية للمعادلة : $x^2 + (y-2)^2 = 4$ ؟ | | | | |
| | A | $r = \sin\theta$ | B | $r = 4\sin\theta$ | |
| | C | $r = 2\sin\theta$ | D | $r = 8\sin\theta$ | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين: $v = \langle -1, -4, 2 \rangle, u = \langle 6, -1, -2 \rangle$؟ | | | | |
| | A | $\langle -10, 10, 25 \rangle$ | B | $\langle -10, -10, 25 \rangle$ | |
| | C | $\langle -10, -10, -25 \rangle$ | D | $\langle -10, 10, -25 \rangle$ | |

## 1 تمثيل الأعداد المركبة و إيجاد قيمتها المطلقة




$a + b\,i$

الجزء الحقيقي — الجزء التخيلي

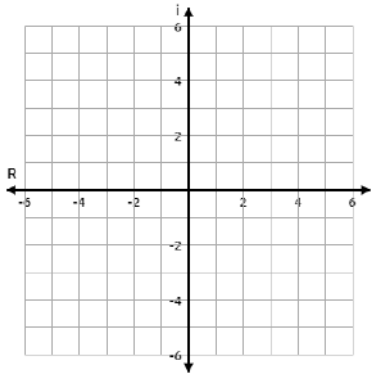
القيمة المطلقة لعدد المركب: $z = a+b\,i$ هي:

$$|z| = |a + b\,i| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

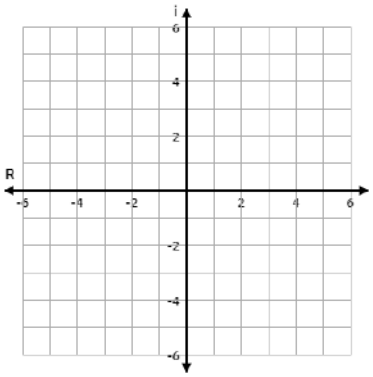
تحقق من فهمك : صـ 285ـ

مثل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب ، وأوجد قيمته المطلقة:

(1A $5 + 2i$

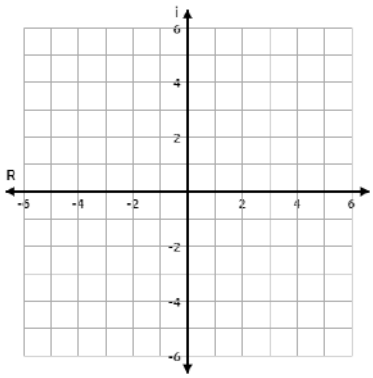



(1B $-3 + 4i$

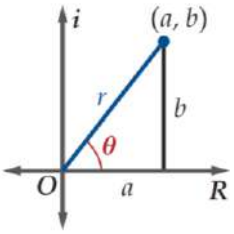


تدرب: صـ 292ـ

(2 $-3 + i$



## 2 الأعداد المركبة بالصورة القطبية




التحويل من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية حيث: $z = a + b\,i$ :

$$Z = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

- $\theta$ السعة
- r المقياس

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- $a > 0$ : $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$
- $a < 0$ : $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + 180°$
- $a = 0$ :
  - $y < 0$ : $\theta = 270°$
  - $y > 0$ : $\theta = 90°$

تحقق من فهمك : صـ 286ـ عبر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية

(2A $9 + 7\,i$

θ | r

الصورة القطبية للعدد : $9 + 7\,i$ هي:

(2B $-2 - 2i$

θ | r

الصورة القطبية للعدد :$-2 - 2i$ هي:

تدرب: صـ 292ـ

(8 $4 + 4i$

θ | r

الصورة القطبية للعدد : $4 + 4i$ هي:

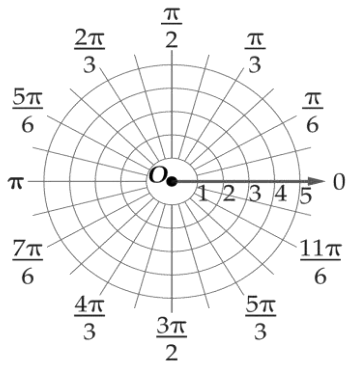
## 3 تمثيل الصورة القطبية لعدد مركب وتحويلها إلى الصورة الديكارتية

التحويل من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية حيث:

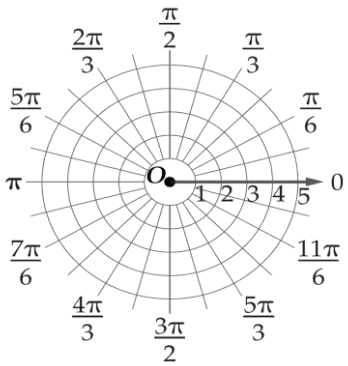
$$z = a+b\,i = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

**تحقق من فهمك : صـ 286ـ** مثل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي ، ثم عبر عنه بالصورة الديكارتية:

(3A $5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

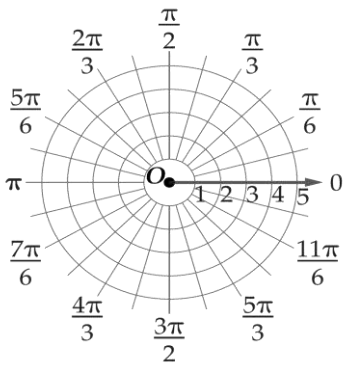



(3B $4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\sin\frac{5\pi}{3}\right)$



**تدرب: صـ 292ـ**

(14 $4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}\right)$



## 4 ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية

للعددين المركبين: $z_1 = r_1\,(\cos\theta_1 + i\,\sin\theta_1)$ , $z_2 = r_2\,(\cos\theta_2 + i\,\sin\theta_2)$

صيغة الضرب: $z_1\,z_2 = r_1 r_2\,[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\sin(\theta_1+\theta_2)]$

صيغة الضرب: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\sin(\theta_1-\theta_2)]$

حيث : $r_2 \neq 0$ , $z_2 \neq 0$

تحقق من فهمك : صـ 287ـ

أوجد الناتج على الصورة القطبية ، ثم عبر عنه بالصورة الديكارتية لكل مما يأتي:

A) $5(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}) \cdot 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3})$

B) $2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\sin\frac{2\pi}{3}) \cdot 6\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\sin\frac{3\pi}{4})$

تدرب: صـ 292ـ

19) $2\,(\cos 45° + i\,\sin 45°) \cdot 5\,(\cos 135° + i\,\sin 135°)$

## 5 قسمة الأعداد المركبة على الصورة القطبية

تحقق من فهمك : صـ 288ـ

5) كهرباء إذا كان فرق جهد دائرة كهربائية $120\ V$ ، وكانت شدة التيار $(8 + 6\,j)$ أمبير، فأوجد معاوقتها على الصورة الديكارتية

تدرب: صـ 292ـ

23) $2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\sin\frac{3\pi}{2}\right) \div 4\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\,\sin\frac{9\pi}{4}\right)$

## 6 نظرية ديمو افر

إذا كان : $Z = r\,(\cos\theta + i\ \sin\theta)$ عددا مركبا على الصورة القطبية ، وكان عددا صحيحا موجبا فإن :

$$z^n = [r\,(\cos\theta + i\ \sin\theta)]^n = r^n\,(\cos n\theta + i\ \sin\ n\theta)$$

تحقق من فهمك : صـ 289ـ

أوجد الناتج في كل مما يأتي ، وعبر عنه بالصورة الديكارتية:

A6) $(1 + \sqrt{3}\ i)^4$

(6B $(2\sqrt{3}-2i)^8$

تدرب: صـ 292ـ

(29 $[4(cos\frac{\pi}{2}+i\,sin\frac{\pi}{2})]^4$

## 7 جذور العدد المركب

لأي عدد صحيح $n \geq 2$ فإن للعدد المركب $r(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)$ ، $n$ من الجذور النونية المختلفة ويمكن

إيجادها باستعمال الصيغة :

$$r^{\frac{1}{2}}\left(cos\,\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\,sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

حيث : $k = 0,1,2,3,\dots,n-1$

تحقق من فهمك : صـ 290ـ

7A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد $2+2i$

7B) أوجد الجذور التكعيبية للعدد $8$

تدرب: صـ 293ـ

34) أوجد الجذور التربيعية للعدد $-2-4i$

## 8 الجذور النونية للعدد واحد

- الجذور النونية المختلفة لأي عدد مركب جميعها لها المقياس نفسه ويساوي : $r^{\frac{1}{2}}$
- سعة الجذر الأول تساوي ثم تزداد الجذور الأخرى على التوالي بإضافة : $\frac{\theta}{n}$
- لإيجاد الجذور النونية للعدد $1$ نضع العدد $1$ على الصورة القطبية $1(cos\ 0+i\ sin\ 0)$
- الجذور النونية المختلفة للعدد " واحد" جميعها لها المقياس نفسه و يساوي $1$

تحقق من فهمك : صـ 290ـ

8A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد واحد.

8B) أوجد الجذور السداسية للعدد واحد.

مهارات التفكير العليا: صـ 293ـ

42)اكتشف الخطأ : يحسب كل من أحمد وباسم قيمة $(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{i})^5$ فيستعمل أحمد نظرية ديمو افر ويحصل على الإجابة $\boldsymbol{cos}\frac{5\pi}{6}+\boldsymbol{i}\ \boldsymbol{sin}\frac{5\pi}{6}$ ويقول باسم بأن أحمد قد أنجز جزءا من المسألة فقط . أيهما إجابته صحيحة ؟

الواجب:

تدرب على الاختبار: صـ 294ـ

56) أي مما يأتي يمثل $\overrightarrow{AB}$ وطوله ، إذا كان $A(3,4,-2)$ , $B(-5,2,1)$

A. $\langle -8,-2,3\rangle$ , $\sqrt{77}$

B. $\langle 8,-2,3\rangle$ , $\sqrt{77}$

C. $\langle -8,-2,3\rangle$ , $\sqrt{109}$

D. $\langle 8,-2,3\rangle$ , $\sqrt{109}$

57) ما المسافة بين النقطة $\left(-3,\frac{5\pi}{3}\right)$ والنقطة $\left(6,\frac{\pi}{4}\right)$؟

A. 3.97

B. 4.97

C. 5,97

D. 6.97

## تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | القيمة المطلقة للعدد المركب : $3+4i$ | | | | |
| | A | 2 | | B | 3 |
| | C | 4 | | D | 5 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | عدد مركب مقياسه 3 وسعته $30°$، ما الصورة القطبية لهذا العدد؟ | | | | |
| | A | $\cos 90° + i\,sin\ 90°$ | | B | $\sin 30° + i\,cos\ 30°$ |
| | C | $3(\sin 30° + i\,cos\ 30°)$ | | D | $3(\cos 30° + i\,sin\ 30°)$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | سعة العدد المركب $z = 7\left(cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ تساوي : | | | | |
| | A | $30°$ | | B | $60°$ |
| | C | $90°$ | | D | $120°$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | الصورة الديكارتية للعدد المركب $2(\cos 45° + i\,sin\ 45°)$ هي: | | | | |
| | A | $\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ | | B | $2i\sqrt{2}$ |
| | C | $2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$ | | D | $2 + 2\,i$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | قيمة المقدار $[2(cos22.5° + i\sin 22.5°)]^4$ تساوي : | | | | |
| | A | $-16$ | | B | $-16\,i$ |
| | C | $16$ | | D | $16i$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | قيمة المقدار $[2(cos15° + i\cos 75°)]^6$ تساوي : | | | | |
| | A | $1$ | | B | $-1$ |
| | C | $i$ | | D | $-i$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | إذا كان : $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ,$z_1 = 5(cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ ، فما حاصل ضرب $z_1z_2$ ؟ | | | | |
| | A | $10\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ | | B | $10\left(cos^2\frac{\pi^2}{18} + i\,sin^2\frac{\pi^2}{18}\right)$ |
| | C | $10\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ | | D | $10\left(cos^2\frac{\pi^2}{18} - i\,sin^2\frac{\pi^2}{18}\right)$ |

تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | عند إيجاد الجذور التكعيبية للعدد المركب: $8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$، ما مقياس الجذر الثاني ؟ | | | | |
| | A | 1 | B | 2 | |
| | C | 4 | D | 8 | |
| 9 | عند إيجاد الجذور الخماسية للعدد المركب: $3(\cos\pi+i\sin\pi)$، ما سعة الجذر الأول ؟ | | | | |
| | A | $\frac{\pi}{5}$ | B | $\frac{\pi}{3}$ | |
| | C | $\Pi$ | D | $5\pi$ | |
| 10 | عند إيجاد الجذور الرباعية للعدد واحد فإن مقياس الجذر الثالث يساوي : | | | | |
| | A | 1 | B | 2 | |
| | C | 3 | D | 4 | |
| 11 | مقياس العدد المركب: $(i-1)^8$ | | | | |
| | A | **6** | B | 12 | |
| | C | 8 | D | 16 | |
| 12 | $(1+i\sqrt{3})^6$=..... | | | | |
| | A | 27 | B | $27\sqrt{3}$ | |
| | C | 64 | D | $64\sqrt{3}$ | |
| 13 | ناتج ضرب : $2(\cos 45°+i\sin 45°),5(\cos 135°+i\sin 135°)$ على الصورة الديكارتية | | | | |
| | A | $-10$ | B | 10 | |
| | C | $10+i$ | D | $10-i$ | |
| 14 | إذا كانت: $z_1=(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}), z_2=(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ فإن $\frac{z_1}{z_2}=$ | | | | |
| | A | $1+\sqrt{3}\,i$ | B | $1-\sqrt{3}\,i$ | |
| | C | $\frac{1}{3}(1+\sqrt{3}\,i)$ | D | $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)$ | |

تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 15 | أي مما يأتي يمثل $\overrightarrow{AB}$ وطوله ، إذا كان $A(3,4,-2)$ , $B(-5,2,1)$ | | | | |
| | A | $\langle -8,-2,3\rangle, \sqrt{77}$ | | B | $\langle 8,-2,3\rangle, \sqrt{77}$ |
| | C | $\langle -8,-2,3\rangle, \sqrt{109}$ | | D | $\langle 8,-2,3\rangle, \sqrt{109}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 16 | ما المسافة بين النقطة $(-3,\frac{5\pi}{3})$ والنقطة $(6,\frac{\pi}{4})$؟ | | | | |
| | A | 3.97 | | B | 4.97 |
| | C | 5.97 | | D | 6.97 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | أي مما يأتي يمثل تقريبا الصورة القطبية للعدد المركب : $20-21i$ ؟ | | | | |
| | A | $29(\cos 5.47 + i\sin 5.47)$ | | B | $29(\cos 5.52 + i\sin 5.52)$ |
| | C | $32(\cos 5.47 + i\sin 5.47)$ | | D | $32(\cos 5.52 + i\sin 5.52)$ |

# الفصل السابع

## الاحتمال والإحصاء

- الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة.
- التحليل الإحصائي
- الاحتمال المشروط.
- الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية.
- التوزيع الطبيعي.
- التوزيعات ذات الحدين.

## 1 العينات المتحيزة وغير المتحيزة

**الدراسات المسحية(جمع البيانات)**

- **تعداد عام** — إذا شملت جميع المجتمع

- **العينة** — إذا شملت عدد محدود من المجتمع
  - **متحيزة** — عندما يتم تفضيل بعض أقسام المجتمع على باقي الأقسام.
  - **غير متحيزة** — إذا تم اختيارها عشوائياً.

لتجنب التحيز في الدراسات المسحية المعتمدة على العينات لابد من تحقق أمرين هما:

- ✓ العينة العشوائية مناسبة ( غير متحيزة وحجمها كبير نسبيا)
- ✓ ألا تكون الأسئلة المطروحة متحيزة.

**تحقق من فهمك : صـ 302ـ** حدد ما إذا كانت كل دراسة مسحية مما يلي تتبنى عينة متحيزة أم لا ، فسر اجابتك

1A) سؤال كل لاعب في فريق كرة السلة عن الرياضة التي يحب مشاهدتها على التلفاز.

.....

.....

.....

1B) الذهاب إلى ملعب كرة القدم وسؤال 100 شخص اختيروا عشوائيا عن رياضتهم المفضلة.

.....

.....

.....

**تدرب: صـ 305ـ**

1) استطلاع رأي كل ثالث شخص يخرج من مطعم للمشويات ، لمعرفة الوجبة المفضلة للناس.

.....

.....

2) الاستفسار من طلاب صف معين من المتميزين في مادة العلوم عن أفضل المواد لديهم.

.....

3) الاستفسار من الطالب الذي ترتيبه 20 من كل 20 طالبا يخرجون من مدرستك، عن الطالب الذي سيصوتون له في انتخابات المجلس الطلابي.

.....

.....

4) دراسة مسحية : بين ما إذا كانت الراسة المسحية الآتية تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة ، فسر إجابتك.

" استطلاع آراء طلاب في كلية الطب، لمعرفة المهنة المستقبلية المفضلة لدى الشباب.

.....

.....

## 2 تصميم الدراسات المسحية

**من أنواع الدراسات**

**المسحية**
تتم ملاحظة الأفراد دون أي محاولة للحصول على المعلومات من مجتمع الدراسة أو عينة منه

**القائمة على الملاحظة**
تتم ملاحظة الأفراد دون أي محاولة للتأثير في النتائج

**التجريبية**
إجراء معالجة خاصة الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء قيد الدراسة

- **المجموعة التجريبية**: الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء التي تخضع للمعالجة
- **المجموعة الخاضعة**: الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء الذين لا يخضعون للمعالجة أو يخضعون لمعالجة شكلية

تُعطى المعالجة الشكلية لكي لا يعرف أفراد المجموعات لأي المجموعتين ينتمون, وتصبح الدراسة التجريبية عندها غير منحازة.

تحقق من فهمك : صـ 303ـ

أي مما يأتي يحدد أفضل مادةبالنسبة إلى الطلاب دون تحيز؟
2A) هل تفضل المادة التي خرجت من حصتها الآن؟
2B) أيهما تفضل أكثر: العلوم أو الرياضيات؟
2C) ما مادتك المفضلة؟

.....

تدرب: صـ 305ـ

5) حدد سؤال الدراسة المسحية الذي تحصل منه على الإجابة المطلوبة بشكل أفضل:
" يريد زاهر أن يحدد فريق كرة القدم الأكثر شعبية في المملكة"
a) ما اسم فريق كرة القدم الذي تفضله في مدينة الرياض؟
b) ما اسم فريق كرة القدم الذي تفضله في المملكة؟
c) ما مدى تقديرك لفريق كرة القدم في المملكة؟

.....

## 3 الدراسات التجريبية والدراسات القائمة على الملاحظة

**متى نستخدم كل نوع من أنواع الدراسات ؟**

**المسحية**
عند الرغبة في جمع بيانات أو آراء أفراد المجتمع حول موضوع معين

**القائمة على الملاحظة**
عند الرغبة في دراسة أثر معالجة سابقة تعرض لها أفراد من المجتمع دون أي تأثير عليهم من الباحث

**التجريبية**
عند الرغبة في اختيار طريقة جديدة أو في دراسة نتائج معالجة مقصودة يؤثر الباحث بها في مجموعة من الأفراد يتم تعيينهم عشوائيا

**تحقق من فهمك : صـ 303ـــ**

حدد ما إذا كان الموقف الآتي يمثل دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة ، وفي حال الدراسة التجريبية اذكر كل من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية ، ثم بين ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزة أم لا.

3) اختر 80 طالبا جامعيا نصفهم درس الأحصاء في المدرسة الثانوية ، وقارن نتائج المجموعتين في مساق للإحصاء تم تدريسه في الجامعه .

.....

.....

.....

**تدرب: صـ 305ـــ**

حدد ما إذا كان الموقف الآتي يمثل دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة ، وفي حال الدراسة التجريبية اذكر كل من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية ، ثم بين ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزة أم لا.

8) قبل الاختبار قام المعلم باختيار شعبتين من الصف نفسه بشكل عشوائي ، وقام بمراجعة المادة لطلاب إحداهما ، بينما لم يراجع المادة لطلاب الشعبة الأخرى . ثم قام بمقارنة نتائج الاختبار لهما.

.....

.....

.....

9) وجد عادل 100 شخص ، نصفهم متطوعون في مأوى الفقراء ، وقارن بين متوسط الدخل السنوي لأفراد المجموعتين.

.....

.....

.....

## 4 الدراسات المسحية التجريبية والدراسات القائمة على الملاحظة

**تحقق من فهمك : صـ 304ـــ**

حدد ما إذا كانت الحالة الآتية تتطلب دراسة مسحية أو دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة ، فسر اجابتك

4) نريد استطلاع آراء طلاب مدرسة ثانوية حول وسيلة المواصلات المدرسية باستعمال مقياس متدرج من 1( لا أو افق مطلقا) إلى 5 ( أو افق وبشدة) .

.....

**تدرب: صـ 305ـــ**

حدد ما إذا كانت كل من الحالات الآتية تتطلب دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة أو دراسة مسحية ، وفسر اجابتك

13) تريد اختيار علاج لمعالجة الصلع عند الرجال.

.....

14) تريد استطلاع آراء أشخاص حول سياسة جديدة لشركة.

.....

15) تريد معرفة ما إذا كان عدد سنوات الركض يؤثر في حركة الركبة أو لا.

.....

16) تريد معرفة ما إذا كانت المشروبات الغازية تؤثر ف يجدار المعدة أم لا.

.....

17) تريد اختبار معالجة معينة تبعد الحيو انات عن البساتين التي تحوي غزلانا.

.....

## 5 الارتباط والسببية

### التمييز بين الارتباط والسببية

**الارتباط**

عندما يوجد ارتباط بين ظاهرتين،
فإن كلاً من الظاهرتين تؤثر في الأخرى

**السببية**

وقوع ظاهرة معينة, يكون سبباً مباشراً في
وقوع الظاهرة الأخرى
لذا فإن السببية تتضمن الترتيب الزمني
( إذا لم يوجد سبب آخر يعطي النتيجة فإننا
نفترض السببية )

**تحقق من فهمك : صـ 304ـــ**

بين ما إذا كانت العبارة الآتية تظهر ارتباطا، أو سببية ، ثم فسر إجابتك

5A) عندما أدرس أحصل على ممتاز.

.....

.....

5B) إذا صاحبت شخصا حسن السيرة ، فإنك تقتدي بأخلاقه الحسنة.

.....

.....

**تدرب: صـ 305ـــ**

بين ما إذا كانت كل من العبارات الآتية تظهر ارتباطا، أو سببية ، ثم فسر إجابتك

18) عندما أمارس الرياضة، أكون في وضع نفسي أفضل.

.....

.....

19) عندما يكون الجو باردا وممطرا بغزارة ، لا نذهب إلى المدرسة.

.....

.....

20) عندما يكون الطقس حارا في فصل الصيف ، يكثر بيع المشروبات الباردة.

.....

.....

21) كثرة القراءة تجعلك أكثر ذكاء.

.....

.....

22) دلت البحاث على أن من يتقن أكثر من لغة ، يكون أقل إمكانية للإصابة بالمرض.

.....

.....

23) النوم بحذائك يؤدي إلى شعورك بالصداع.

.....

.....

## مهارات التفكير العليا: صـ 306ــ

25) اكتشف الخطأ : طُلب إلى كل من سامي وهشام أن يصمم دراسة تجريبية غير متحيزة ، هل وفق أي منهما في ذلك

**سامي**

- خذ مجموعة من 20 شخصا بطريقة عشوائية
- اطلب إلى نصفهم عشوائيا الالتزام بحمية تعتمد على الفواكه لاكامل لمدة 3 أسابيع
- قارن بين أوزانهم بعد السابيع الثلاثة

**هشام**

- خذ 20 لاهبا لكرة القدم
- اطلب إلى نصفهم عشوائيا أن يقفزوا 500 قفزة إلى أعلى في اليوم
- قارن عدد مرات القفز إلى أعلى التي تستطيع كل مجموعة تنفيذها بعد الأسابيع الثلاثة

.....

.....

.....

## تدرب على الاختبار: صـ306ــ

حدد ما إذا كانت كل حالة من الحالات الآتية تمثل دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة ، و إذا كانت الدراسة التجريبية اذكر كل من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية ، ثم بين ما إذا كانت متحيزة أم لا.

40) اختر220 شخصا عشوائيا وقسمهم عشوائيا إلى مجموعتين إحداهما تقوم بالتدريبات الرياضية مدة ساعة واحدة يوميا والأخرى لا تقوم بهذه التدريبات ، قم قارن بين كتلة الجسم لكل من المجموعتين.

.....

.....

41) اختر 200 كال ، نصفهم يمارس كرة القدم ، وقارن فترة النوم بين المجموعتين.

.....

.....

42) اختر100 طالب جامعي ، نصفهم لديه وظيفة بدوام جزئي وقارن معدلاتهم التراكمية.

.....

.....

## الواجب:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | إذا اختير200 طالب ، وتم تقسيمهم عشوائيا إلى نصفين مع إخضاع إحدى المجموعتين إلى برنامج تدريبي وعدم إخضاع الأخرى لأي برنامج، فما الدراسة المستخدمة | | | | |
| | A | تجريبية دراسة | | B | دراسة مسحية |
| | C | بالملاحظة دراسة | | D | ارتباط |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | ما الدراسة المستخدمة في معرفة ما إذا كان التدخين لمدة 10 سنين يؤثر في سعة الرئة أم لا... | | | | |
| | A | تجريبية دراسة | | B | دراسة مسحية |
| | C | بالملاحظة دراسة | | D | ارتباط |

## 1 مقاييس النزعة المركزية

مقاييس النزعة المركزية

**المتوسط الحسابي**

جمع جميع القيم ثم قسمة الناتج على عدد تلك القيم أي

$$\frac{\text{مجموع قيم البيانات}}{\text{عدد البيانات}}$$

**لا توجد في البيانات قيم متطرفة

**الوسيط**

- إذا كان عدد القيم فردي: القيمة التي يكون ترتيبها في منتصف مجموعة البيانات بعد ترتيبها تنازليا أو تصاعديا
- أما إذا كان عددها زوجي نأخذ القيمتين اللتان تقعان في منتصف البيانات، ثم يتم جمعهما معًا وقسمة الناتج على 2

** توجد في البيانات قيم متطرفة
ولا توجد فجوات كبيرة في منتصف البيانات

**المنوال**

القيمة الأكثر تكرارا أو شيوعا بين القيم

**تحوي البيانات قيم مكررة

**تحقق من فهمك : صـ 308ـــ**

1) تمنح مؤسسة جائزة كبرى قيمتها 20000 ريال و30 جائزة أخرى قيمة كل منها 500 ريال ، أي مقاييس النزعة المركزية يلائم البيانات بصورة أفضل ؟ ولماذا؟.

.....

.....

**تدرب: صـ 311ـــ** أي مقاييس النزعة المركزية يصف بصورة أفضل البيانات الآتية؟

1) 758 , 776 . 781 , 796 , 833

.....

2) 19.2 , 40.4 , 36.8 , 37,2.

.....

3) 69 , 60 , 58 , 63 , 65 , 55 , 60 , 71 , 70 , 65.

.....

4) 49 , 55 , 61 , 59 , 45 , 61 , 53

.....

## 2 هامش خطأ المعاينة

هامش خطأ المعاينة

عند سحب عينة حجمها n من مجتمع كلي, فإنه يمكن تقريب هامش الخطأ في المعاينة بالقيمة

$$\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$$

يوجد نوعان من المقاييس يمكن استعمالهما لمجموعة بيانات , هما المَعلَمة وهو مقياس يصف خاصية في المجتمع الكلي.
والاحصائي وهو مقياس يصف خاصية في عينة

** كلما زاد الحجم قل هامش الخطأ

**تحقق من فهمك : صـ 308ـــ**

في دراسة مسحية عشوائية شملت 3247 شخصا ، قال 41% منهم إنهم مرتاحون للنهضة العلمية

2A) ما هامش خطأ المعاينة؟

.....

2B) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة أفراد المجتمع المرتاحين للنهضة العلمية؟

.....

**تدرب: صـ 311ـــ**

8) رياضة: في دراسة مسحية عشوائية شارك فيها 5669 شخصا، وجد أن 31% منهم يشاهدون مباراة واحدة على الأقل في كرة القدم شهريا.

a) ما هامش خطأ المعاينة؟.....

b) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين يشاهدون مباراة واحدة على الأقل في كرة القدم شهريا؟

.....

## 3 الانحراف المعياري

**مقاييس التشتت**

تصف هذه المقاييس مقدارتباعد البيانات أو تقاربها من المتوسط

- التباين
- الانحراف المعياري
  - العينة: $s=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}{n-1}}$ حيث n عدد قيم العينة و $\bar{x}$ المتوسط الحسابي للعينة و $x_k$ قيم العينة.
  - المجتمع: $\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k-\mu)^2}{n}}{n}}$ حيث n عدد قيم المجتمع و $\mu$ المتوسط الحسابي للمجتمع و $x_k$ قيم المجتمع.

تحقق من فهمك : صـ 308ـ

3A) احسب المتوسط و الانحراف المعياري للمجتمع للبيانات المحددة في الجدول المجاور

| | | | |
|---|---|---|---|
| 31 | 33 | 33 | 34 | 28 |
| 31 | 36 | 34 | 29 | 33 |
| 36 | 28 | 32 | 29 | 30 |
| 28 | 28 | 29 | 33 | 29 |
| 29 | 27 | 28 | 31 | 26 |

| عدد مرات التكرار | $x$ | $(x-\mu)$ | $(x-\mu)^2$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| المجموع | | | |

3B) ضع 70 مكان 30 في الجدول المجاور. ماذا تتوقع أن يحدث لكل من المتوسط والانحراف المعياري ؟ أعد الحسابات للتحقق.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 31 | 33 | 33 | 34 | 28 |
| 31 | 36 | 34 | 29 | 33 |
| 36 | 28 | 32 | 29 | 30 |
| 28 | 28 | 29 | 33 | 29 |
| 29 | 27 | 28 | 31 | 26 |

| عدد مرات التكرار | $x$ | $(x-\mu)$ | $(x-\mu)^2$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

3C) اختير(5) طلاب عشوائيا من فصل دراسي ، وقيست أطوالهم فكانت : 175 سم ، 170 سم، 168 سم، 167 سم ، 170 سم . بين ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعا ، ثم أوجد الانحراف المعياري لأطوال هؤلاء الطلاب.

| عدد مرات التكرار | $x$ | $x-\bar{x}$ | $(x-\bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| المجموع | | | |

**تدرب: صـ 311ــ**

10) قيادة : تحدد عادة السرعات القصوى على الطرقات تفاديا للحوادث .

a) فيما يأتي السرعات القصوى (mi/h) للطرقات جميعها في إحدى الدول بين مدنها وقراها . بين ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعا ، ثم أوجد الانحراف المعياري للسرعات في الجدول أدناه.

| السرعات القصوى للطراقات جميعها (mi/h) | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 70 | 70 | 65 | 65 | 75 | 70 | 70 | 75 | 65 | 70 |

| عدد مرات التكرار | $x$ | $(x-\mu)$ | $(x-\mu)^2$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| المجموع | | | |

.....

.....

.....

.....

**مهارات التفكير العليا: صـ 312ــ**

16) تبرير: حذفت قيمة متطرفة كبيرة من مجموعة بيانات ، كيف يؤثر ذلك في المتوسط والانحراف المعياري لمجموعة البيانات؟ وضح ذلك.

.....

.....

.....

.....

**الواجب:**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## تحصيلي رياضيات

**1** أي التالي ليس من مقاييس النزعة المركزية؟

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | الوسط الحسابي | B | الوسيط |
| C | المنوال | D | الانحراف المعياري |

**2** أي مقاييس النزعة المركزية يناسب البيانات التالية بشكل أفضل 45 , 53 , 42 , 75 , 47 , 52 , 46 , 15 ؟

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | الوسط | B | الوسيط |
| C | التباين | D | المنوال |

**3** أي مقاييس النزعة المركزية يناسب بيانات الجدول؟

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 27 | 26 | 27 | 28 | 26 | 28 | 19 | 25 |
| 25 | 26 | 26 | 29 | 26 | 42 | 22 | 26 |
| 27 | 25 | 27 | 30 | 27 | 40 | 27 | 25 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | الانحراف المعياري | B | الوسيط |
| C | المتوسط | D | المنوال |

**4** حددت دائرة المرور سرعات السيارات على الطرق الخارجية بالميل/ ساعة على النحو التالي:
70 , 66 , 64 , 55 ,61 , 75 , 74 , 61 , 78 , 72، ما المنوال لهذه السرعات؟

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | 78 | B | 61 |
| C | 75 | D | 55 |

**5** في دراسة مسحية عشوائية تشمل 100 طالب بمدرسة أفاد 95% منهم أن الجوالات ضرورية لهم ، أوجد هامش الخطأ لهذه الدراسة

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $\pm 0.001$ | B | $\pm 0.01$ |
| C | $\pm 0.1$ | D | $\pm 10$ |

**6** إذا أجريت دراسة مسحية على 625 شخص ، وقال 47 % منهم إن القراءة مفيدة ، فإن نسبة أفراد المجتمع الذين قالوا إن القراءة مفيدة تتراوح

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | بين 43% و 51% | B | بين 44% و 50% |
| C | بين 40% و 50% | D | بين 45% و 49% |

**7** أي البيانات التالية له أكبر انحراف معياري؟ (ملاحظة: نستبعد البيانات المشتركة في الخيارات قبل إيجاد المدى)

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | 14,10,12,11,13,13 | B | 16,10,15,11,13,13 |
| C | 11,10,20,11,13,13 | D | 14,10,30,11,13,13 |

**8** أي البيانات التالية له أصغر انحراف معياري؟ (ملاحظة: نستبعد البيانات المشتركة في الخيارات قبل إيجاد المدى)

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | 16, 14, 15, 10 ,12 , 12 | B | 16, 10, 15, 15 ,12 , 12 |
| C | 16, 25, 15, 17 ,12 , 12 | D | 16, 16, 15, 10 ,12 , 12 |

تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | في مجموعة من تسعة أعداد مختلفة ، أي مما يأتي لا يؤثر في الوسيط؟ | | | | |
| | A | مضاعفة كل عدد | | B | زيادة القيمة الصغرى فقط |
| | C | زيادة كل عدد بمقدار 10 | | D | زيادة القيمة الكبرى فقط |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | درجات اختبار: كانت درجات 5 طلاب اختيروا عشوائيا في فصل دراسي كما يلي 70 , 50 , 30 , 45 , 55 بين ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعا ، ثم احسب الانحراف المعياري لدرجاتهم إلى أقرب عدد صحيح. | | | | |
| | A | 40 | | B | 14 |
| | C | 15 | | D | 13 |

## 1 الاحتمال المشروط

### الاحتمال المشروط

يسمى احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A "احتمالاً مشروطاً"

إذا كانت A,B حادثتين غير مستقلتين، فإن الاحتمال المشروط لوقوع الحدث B إذا عُلم A

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$P(A)\neq 0$$

يرمز له بالرمز P(B|A)

**تحقق من فهمك : صـ 313ـ**

1) يحتوي كيس على 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية : الأحمر و الأخضر و الأزرق و الأصفر ، ورقمت بطاقات كل لون بالأعداد من 1 إلى 13 . إذا سحبت نوال بطاقة ، فما احتمال أن تحمل هذه البطاقة العدد 13 علما بأن ما سحبته كان العدد 11 أو 12 أو 13 ؟

.....

**تدرب: صـ 315ـ**

يحتوي كيس على 8 كرات زرقاء ، و6 كرات حمراء ، و10 كرات صفراء ، و6 كرات بيضاء ، و5 كرات خضراء . إذا سحبت كرة واحدة عشوائية فأوجد الاحتمال في كل حالة مما يأتي :

1) أن تكون الكرة خضراء ، إذا علم أنها ليست زرقاء.

.....

2) أن تكون حمراء ، إذا علم أنها ليست خضراء.

.....

3) أن تكون صفراء ، إذا علم أنها ليست حمراء وليست زرقاء.

.....

4) أن تكون خضراء أو بيضاء ، إذا علم أنها ليست حمراء.

.....

5) أن تكون زرقاء ، إذا علم أنها بيضاء.

.....

## 2 الجداول التو افقية

كتابة الاحتمال : يعبر عن الاحتمال بكسر اعتيادي أو بكسر عشري أو بنسبة مئوية

**تحقق من فهمك : صـ 314ـ**

2) أوجد احتمال أن يكون شخص اختير عشوائيا معافى ، علما بأنه لا يمارس المشي؟

.....

| الحالة | عدد الأشخاص | |
|---|---|---|
| | يمارس المشي (w) | لا يمارس المشي (Nw) |
| مريض(S) | 1600 | 1200 |
| معافى(H) | 800 | 400 |

## تدرب: صـ 311ــ

7) فحص القيادة : يوضح الجدول أدناه أداء مجموعة من الشخاص في فحص القيادة ، علما بأن بعضهم أخذ حصصا تدريبية تحضيرا للفحص ، والبعض الآخر لم يأخذ .

| | أخذ حصصًا | لم يأخذ حصصًا |
|---|---|---|
| ناجح | 64 | 48 |
| راسب | 18 | 32 |

إذا اختير أحد الأشخاص عشوائيا ، فأوجد احتمال كل مما يأتي :

a) الشخص ناجح علما بأنه أخذ حصصا.

.....

b) الشخص راسب علما بأنه لم يأخذ حصصا.

.....

c) لم يأخذ حصصا ، علما بأنه ناجح.

.....

## تحقق من فهمك : صـ 314ــ

3) يوضح الجدول عدد الطلاب الجامعيين الذين يمارسون الرياضة بشكل منتظم ، إذا اختير طالب عشوائيا فأوجد احتمال أن يكون الطالب من ضمن المنتخب الجامعي ، علما بأنه في السنة الأولى؟

| الرياضيون الجامعيون | سنة أولى | سنة ثانية | سنة ثالثة | سنة رابعة |
|---|---|---|---|---|
| ضمن المنتخب الجامعي(K) | 7 | 22 | 36 | 51 |
| ليس ضمن المنتخب الجامعي(S) | 269 | 262 | 276 | 257 |

A) 2.6% تقريبا B) 2.5% تقريبا C) 8.4% تقريبا D) 7.7% تقريبا

.....

## تدرب: صـ 315ــ

9) اختيار من متعدد: بين الجدول أدناه أعداد الطلاب الذين حضروا مباراة كرة القدم ، والذين تغيبوا عنها من السنوات الجامعية الأولى والثانية والثالثة والرابعة .

| | أولى | ثانية | ثالثة | رابعة |
|---|---|---|---|---|
| الحضور | 48 | 90 | 224 | 254 |
| الغياب | 182 | 141 | 36 | 8 |

إذا اختير أحد الطلاب عشوائيا، فأوجد احتمال أن يكون قد حضر المباراة علما بأنه من السنة الثالثة .

A) 48.6% تقريبا B) 77.6% تقريبا C) 86.2% تقريبا D) 91.6% تقريبا

.....

## مهارات التفكير العليا: صـ 316ــ

17) تحد: ألقي مكعب مرقم من 1 إلى 6 خمس مرات متتالية ،ما احتمال ظهور الرقم 2 في الرميات الخمس علما بأن الرقم 2 ظهر في الرميات الثلاثة الأولى؟

.....

.....

.....

## الواجب:

.....

.....

.....

# تحصيلي رياضيات

**1** يبين الجدول التالي عدد الطلاب المشاركين وغير المشاركين في مسابقة القرآن الكريم في المرحلة الابتدائية ، فإذا اختير طالبا عشوائيا ، فما احتمال أن يكون مشاركا ؟ علما بأنه في الصف الثالث.

| | الصف الثاني | الصف الثالث |
|---|---|---|
| مشارك | 30 | 40 |
| غير مشارك | 50 | 80 |

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{5}$

**2** يحاول باحث تحديد أثر إضاءة نوع جديد من المصابيح على مجموعة من الأزهار، فقام بتعريض مجموعة منها لإضاءة المصابيح الجديدة،والأخرى لإضاءة مصابيح عادية،ويبين الجدول التالي أعداد الأزهار التي عاشت والتي ماتت، فإذا اخترنا زهرة واحدة عشوائية فما احتمال أن تكون الزهرة قد ماتت ؟ علما بأنها تعرضت للإضاءة الجديدة.

| | إضاءة جديدة | إضاءة عادية |
|---|---|---|
| عاشت | 24 | 18 |
| ماتت | 6 | 12 |

(A) 20% (B) 25% (C) 30% (D) 40%

**3** إذا كانت $A,B$ حادثتين في فضاء العينة لتجربة عشوائية ما، بحيث كان $P(A)=0.2,P(B)=0.5,P(A\cup B)=0.4$ فما قيمة $P(A|B)$؟

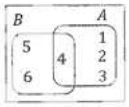
(A) 0.5 (B) 0.6 (C) 0.7 (D) 0.8

**4** في دراسة اجتماعية موضحة نتائجها في الجدول التالي : تم اختيار شخص عشوائيا ، ما احتمال أن يكون عاطلا؟ علما بأنه أعزب.

| | متزوج | أعزب |
|---|---|---|
| موظف | 5 | 3 |
| عاطل | 3 | 9 |

(A) 25% (B) 33% (C) 60% (D) 75%

**5** يبين الشكل نتيجة رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 ما قيمة $P(A|B)$ ؟




(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$

## الاحتمال

نسبة تقيس فرصة وقوع حادثة معينة إن كانت مرغوبة سميت نجاحا وعدم وقوعها يسمى فشلا

إذا كان عدد مرات نجاح وقوع حادثه $S$ من المرات ، وعدد مرات فشل وقوع الحادثه نفسها $f$ من المرات

**احتمال النجاح**

$$P(S)=\frac{s}{s+f}$$

**احتمال الفشل**

$$P(F)=\frac{f}{s+f}$$

$$P\left(\text{الحادثة}\right)=\frac{\text{عدد النواتج في الحادثة}}{\text{عدد النواتج الممكنة}}$$

تنبيه

احتمال النجاح والفشل:

لاحظ أن الحرف الصغير S يدل على عدد مرات النجاح في وقوع حادثة.

بينما الحرف الكبير $S$ يدل على حادثة النجاح ،

وكذلك بالنسبة للحرفين $F$ $f$.

## 1 الاحتمال باستعمال التو افيق

نعتمد على التو افيق إذا كان الترتيب غير مهم

ونعتمد على التباديل إذا كان الترتيب مهم

$$nC_0=1 \qquad nC_n=1$$
$$nC_1=\text{n} \qquad nC_r=nC_{r-1}$$

تحقق من فهمك : صـ 319ـ

1) في المثال 1 إذا كان عدد الذين رشحوا من الصف الثاني الثانوي 3 ، ومن الصف الأول الثانوي 11، وكان عدد الجوائز 4 ، واختير 4 طلاب من الذين رشحوا بطريقة عشوائية ، فما احتمال أن يفوز طالبان من الصف الثاني وطالبان من الصف الأول؟

.....

.....

تدرب: صـ 321ـ

1) صندق فيه 10 كرات ، منها 6 حمراء ، إذا سحبت منه كرتان معا عشوائيا ، فما احتمال أن تكون الكرتان حمراوين؟

.....

.....

## 2 الاحتمال باستعمال التباديل

نعتمد على التوافيق إذا كان الترتيب غير مهم
ونعتمد على التباديل إذا كان الترتيب مهم

$$np_0 = n! \quad , \quad np_2 = n(n-1)$$
$$np_1 = n$$

تحقق من فهمك : صـ 319ـ

2) سباق : اشترك صلاح ، وعبدالله ، وسليم في سباق 400 m مع خمسة رياضيين آخرين. ما احتمال أن ينهي هؤلاء الثلاثة السباق في المراكز الثلاثة الأولى؟

.....

.....

.....

.....

تدرب: صـ 321ـ

4) مختبر: دخلت طالبات صف وعددهن 26 إلى مختبر المدرسة . إذا اختارت المعلمة أسماء الطالبات عشوائيا لتشكيل مجموعات للعمل فما احتمال أن تكون أول ثلاث طالبات ذكرت أسماؤهن جميلة ، وآمنة، وخديجة على الترتيب؟

.....

.....

## 3 التوزيع الاحتمالي المنفصل

المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي

**المتغير العشوائي**

هو المتغير الذي يأخذ مجموعة قيم لها احتمالات معلومة

والمتغير العشوائي الذي له عدد محدود من القيم يُسمى متغيراً عشوائياً منفصلاً.

**احتمالات المتغيرات العشوائية:**

يقرأ الرمز $P(1)$ احتمال أن يكون المتغير العشوائي $X$ مساويا لـ $1$ .

**التوزيع الاحتمالي**

هو دالة تربط كل قيمة من قيم المتغير العشوائي مع احتمال وقوعها ويعبر عنه بجدول أو معادلة أو تمثيل بياني

ويجب أن يحقق التوزيع الاحتمالي الشرطين التاليين:

- ❑ احتمال كل قيمة من قيم Xمحصورين بين 0 و1.
- ❑ مجموع كل احتمالات قيم Xيساوي1.

**التوزيع الاحتمالي المنفصل**

هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي منفصل

**البيانات المنفصلة:**
تكون البيانات منفصلة إذا أمكن عد البيانات مثل عدد الأرانب في مزرعة

**البيانات المتصلة:**
تكون البيانات متصلة إذا كانت تأخذ أي قيمة في فترة من العداد الحقيقية ، فمثلا أطوال جميع أفراد العينة تمثل بيانات متصلة.

**البيانات الوصفية:**
يمكننا أن نتعامل مع البيانات الوصفية بوصفها متغيرات عشوائية منفصلة.

تحقق من فهمك : صـ 319ـــ

3) يوضح الجدول أدناه توزيعا احتماليا ، حيث ألقي مكعبان مرقمان من 1 إلى 6 مرة واحدة ، وسجل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين واحتمال كل منهما.

| المجموع | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الاحتمال | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{36}$ |

3A) مثل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي.

3B) استعمل التمثيل بالأعمدة لتحدد الناتج الأكثر إمكانية للوقوع ؟ ثم أوجد احتماله.

.....

.....

3C) أوجد $P(5$ أو $11)$

.....

.....

تدرب: صـ 321ـــ

6) أخبار: أجرى موقع إلكتروني مسحا للمصادر التي يحصل منها الناس على الأخبار بشكل رئيس. والجدول المجاور يبين نتائج هذا المسح

| المصدر | الاحتمال |
|---|---|
| التلفاز | 0.35 |
| المذياع | 0.31 |
| الأصدقاء | 0.02 |
| الصحف | 0.11 |
| الإنترنت | 0.19 |
| مصادر أخرى | 0.02 |

a) بين أن هذه البيانات تمثل توزيعا احتماليا.

.....

b) إذا اختير أحد الذين يشملهم هذا المسح عشوائيا ، فما احتمال أن يكون مصدر أخبار الرئيس الصحف أو الإنترنت؟

.....

## 4 القيمة المتوقعة

يمكن إيجادها باستعمال القانون : $E(X) = \sum_{i=n}^{i=n} Xi.P(Xi)$

مجموع حواصل ضرب قيم المتغير العشوائي X في احتمال كل منها p(x)

تحقق من فهمك : صـ 319ـــ

4) أوجد القيمة المتوقعة عند رمي مكعبين مرقمين مرة واحدة ، وتسجيل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين.

.....

.....

.....

.....

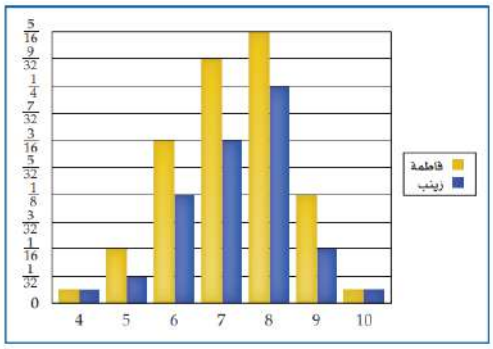
.....

**تدرب: صـ 321ــ**

8) جوائز : باع أحد النوادي 500 تذكرة ةدخول لحضورإحدى مبارياته ثمن الواحدة 10 ريالات ، وأجرى سحب عشوائي على أرقام التذاكر خُصصت فيه ثلاثة جوائز للأرقام الرابحة ، بحيث تربح تذكرة واحدة الجائزة الأولى وقيمتها 1000 ريال ، وتربح تذكرتان الجائزة الثانية وقيمتها 100 ريال ، وتربح 5 تذاكر الجائزة الثالثة وقيمتها 50 ريالا. إذا اشترى شخص تذكرة ، فما القيمة المتوقعة للربح في هذا الموقف؟

**مهارات التفكير العليا: صـ 323ــ**

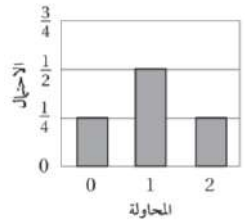
18) اكتشف الخطأ : كونت كل من فاطمة ، وزينب توزيعا احتماليا باستعمال التمثيل بالأعندة لمجموع العددين الناتجين عن دوران مؤشر القرص المجاور مرتين.
أيهما يعد تمثيلها صحيحا ؟ فسر إجابتك.




**الواجب:**

## تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | إذا اشترك عبدالله في سباق 400m مع ثلاثة رياضيين أخرين فإن احتمال أن ينهي عبدالله السباق في المركز الأوليساوي..... | | | | |
| | A | 25% | | B | 50% |
| | C | 75% | | D | 100% |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | الجدول والتمثيل بالأعمدة يبيان التوزيع الاحتمالي للمتغير ( توزيع عدد مرات ظهور الكتابة عند رمي قطعتي نقد ) .<br>أوجد P(كتابتين)<br>عدد الكتابات $X$: 0, 1, 2<br>الاحتمال $P(X)$: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$<br>  <br> | | | | |
| | A | $\frac{1}{4}$ | | B | 1 |
| | C | $\frac{1}{2}$ | | D | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | يحتوي صندوق على 4 كرات حمراء و6 كرات صفراء ، و4 كرات خضراء ، وكرتين زرقاوين . سحبت 3 كرات معا عشوائيا .<br>إذا كان $X$ متغيرا عشوائيا يدل على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة ، فما جميع القيم الممكنة لـ X ؟ | | | | |
| | A | 1, 2 | | B | 0 ,1 ,2 |
| | C | 1, 2 , 3 | | D | 0 , 1 , 2 , 3 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | ما القيمة المتوقعة للتوزيع الاحتمالي المبين في الجدول أدناه؟<br>x: 1, 2, 3<br>p(x): 0.1, 0.8, 0.1 | | | | |
| | A | 0,1 | | B | 2 |
| | C | 0.56 | | D | 1 |

## التوزيعات الاحتمالية المتصلة

هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي متصل , يمكن للنواتج أن تأخذ أي قيمة في فترة من الأعداد الحقيقية

### التوزيع الطبيعي

خصائص التوزيع الطبيعي هي:

1-التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس, ومتماثل بالنسبة للمتوسط.

2-يتساوى فيه المتوسط والوسيط والمنوال وتقع في المركز.

3-المنحنى متصل.

4-يقترب المنحنى من المحور x في جزأيه الموجب والسالب, ولكنه لا يمسه.

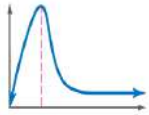
### التوزيعات الملتوية

**التواء موجب**

ملتو إلى اليمين

التوزيع مكثف في اليسار

والذيل لليمين

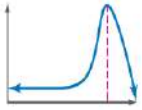


**التواء سالب**

ملتو إلى اليسار

التوزيع مكثف في اليمين

والذيل لليسار



**التوزيع الطبيعي**

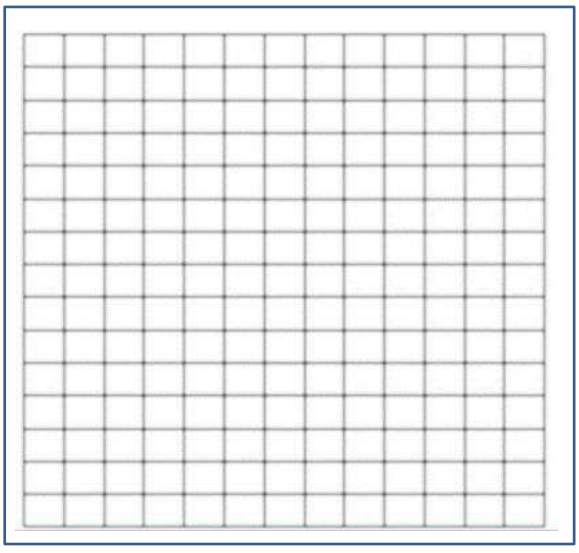
في الحالات جميعها يجب أن يكون عدد البياناتكبيرا ليكون التوزيع طبيعيا تقريبا

## 1 تصنيف بيانات التوزيع

تحقق من فهمك : صـ 325ـ

1) حدد ما إذا كانت البيانات في الجدول المجاور تظهر التواء موجبا أو التواء سالبا أو موزعة توزيعا طبيعيا.

| قياس الحذاء | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 6 | 8 | 9 | 7 | 4 | 2 | 3 | 1 |



**تدرب: صـ 327ــ**

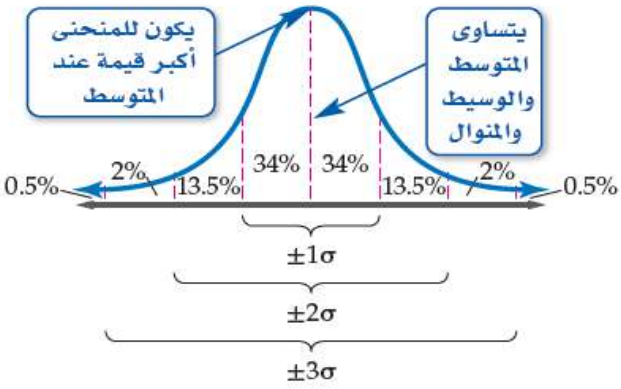
1) درجات : يوضح الجدول أدناه نتائج أحد الاختبارات (النهائية العظمى للاختبار40) . حدد ما إذا كانت البيانات تظهر التواء موجبا ، أو التواء سالبا ، أو موزعه توزيعا طبيعيا .

| فئات الدرجات | عدد الطلاب |
|---|---|
| 13–15 | 12 |
| 16–18 | 27 |
| 19–21 | 29 |
| 22–24 | 19 |
| 25–27 | 8 |
| 28–31 | 1 |
| 32–35 | 1 |

.....

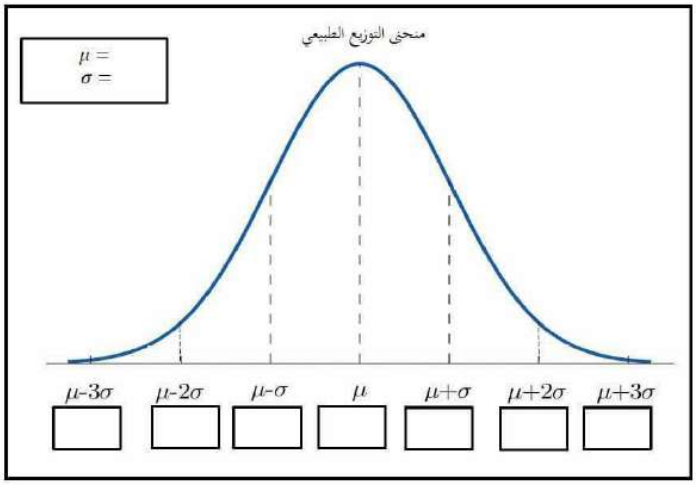
.....

## 2 التوزيع الطبيعي



**تحقق من فهمك : صـ 326ــ**

2) أوجد احتمال أن تكون قيمة تم اختيارها عشوائيا في التوزيع الوارد في المثال 2 أو أقل من49 .
(المتوسط لتوزيع طبيعي 34، و انحرافه المعياري 5)




.....

.....

.....

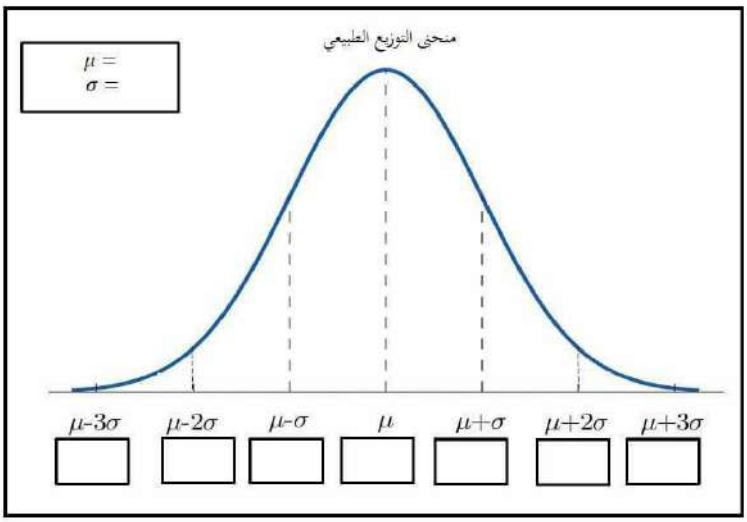
.....

.....

.....

تدرب: صـ 327ـــ

3) تتوزع مجموعة بيانات طبيعيا بمتوسط حسابي 161، و انحراف معياري 12، أوجد أن يتم اختيار قيمة لـ $X$ عشوائيا من هذا التوزيع ، بحيث تكون أقل من 149 ، أي أوجد $P(X < 149)$ .

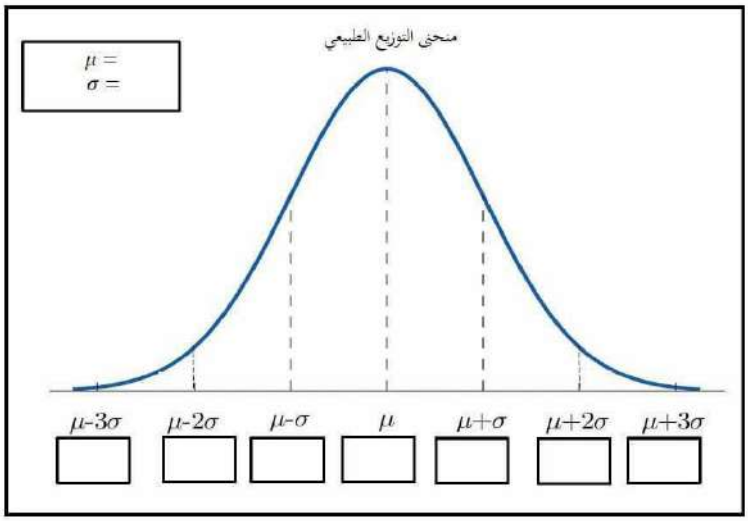



## 3 عينة موزعة توزيعا طبيعيا

تحقق من فهمك : صـ 326ـــ

درجات: إذا علمت أن كتل 100 موظف في شركة تتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط حسابي مقداره 70 كيلو جراما ، و انحراف معياري 10 كيلو جرامات ، فاعتمد ذلك في الاجابة عن السؤالين الآتيين:

3A) ما العدد التقريبي للموظفين الذين تقع كتلهم بين 80 , 60 كيلو جرام؟

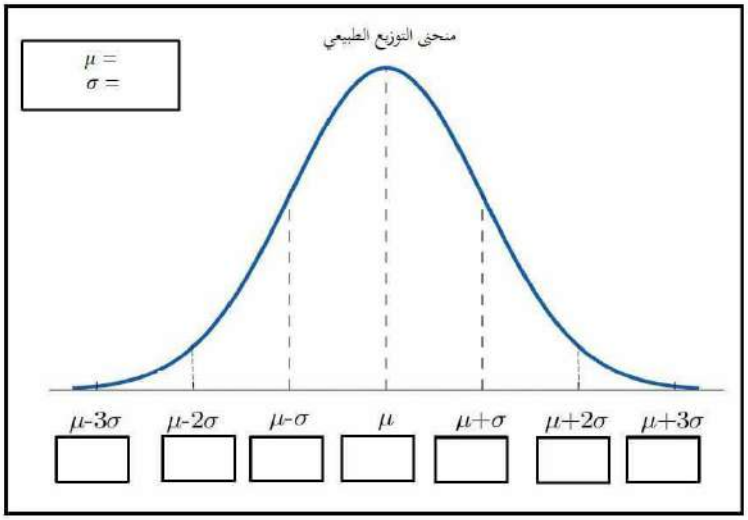



3B) ما احتمال أن يتم اختيار موظف بصورة عشوائية ، وتكون كتلته أقل من 90 كيلو جرام؟

## تدرب: صـ 327ــ

8) مدارس : أعطى عمران اختبارا قصيرا لطلبته البالغ عددهم (50) طالبا ، وكانت الدرجات موزعه توزيعا طبيعيا بمتوسط حسابي 21 ، و انحراف معياري 2.

a) ما العدد التقريبي للطلاب الذين تقع درجاتهم بين 19 , 23؟




b) ما احتمال أن تقع درجة أحد الطلاب بين 17 , 25؟

## مهارات التفكير العليا: صـ 328ــ

14) اكتشف الخطأ : تتوزع أطوال أقطار نوع من الأشجار توزيعا طبيعيا بمتوسط مقداره 11.5 cm ،و انحراف معياري مقداره 2.5 cm. ومدى من 3.6 cm ألى 19.8 cm ، وقد حاولت كت من مريم و أمينة إيجاد مدى 68% من البيانات التي تقع في وسط التوزيع . أيهما كانت إجابتها صحيحة ؟ فسر إجابتك

**مريم**

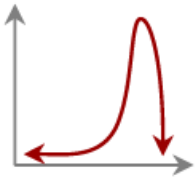
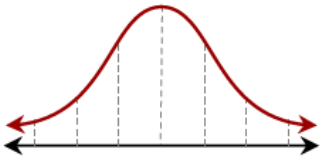
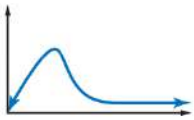
مدى البيانات 16.2 cm ، 68% من المدى يساوي تقريبا 11cm ، ويتوزع هذا المدى بالتساوي حول المتوسط 11.5cm أي أن مدى 68% سيكون من 6 cm إلى 17 cm

**أمينة**

تمتد النسبة 68% من يساوي $\mu + \sigma$ إلى $\mu - \sigma$ ، أي أن مدى 68% سيكون من 9cm إلى 14 cm

## الواجب:

## تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ما الوصف الفضل للتمثيل البياني ؟  | | | | |
| | A | ذو التواء موجب | B | ذو التواء سالب | |
| | C | يمثل توزيعا طبيعيا | D | يمثل توزيعا متماثلا | |
| 2 | المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي في الشكل تساوي....  | | | | |
| | A | $\frac{1}{4}$ | B | $\frac{1}{2}$ | |
| | C | $\frac{3}{4}$ | D | 1 | |
| 3 | مجموعة بيانات تتوزع توزيعا طبيعيا ، فإذا كان وسطها الحسابي 2 و انحرافها المعياري 1 ، فما نسبة أن يكون $x$ أكبر من 3؟ | | | | |
| | A | 84% | B | 97% | |
| | C | 16% | D | 25% | |
| 4 | يتوزع عمر 10000 مصباح كهربائي توزيعا طبيعيا بمتوسط حسابي 300 يوم ، و انحراف معياري 40 يوم . كم مصباحا يقع عمره بين 260 يوما و340 يوما؟ | | | | |
| | A | 2500 | B | 3400 | |
| | C | 5000 | D | 6800 | |
| 5 | ما الوصف الأفضل لمنحنى التوزيع الاحتمالي الممثل  | | | | |
| | A | توزيع سالب الالتواء | B | توزيع متماثل | |
| | C | توزيع طبيعي | D | توزيع موجب الالتواء | |
| 6 | مجموعة بيانات تتوزع توزيعا طبيعيا ، فإذا كان وسطها الحسابي 12 و انحرافها المعياري 2 ، فما قيمة $P(10 < x < 16)$؟ | | | | |
| | A | 81.5 % | B | 68 % | |
| | C | 47.5 % | D | 40 % | |

تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | مجموعة بيانات تتوزع توزيعا طبيعيا ، فإذا كان وسطها الحسابي 25 و انحرافها المعياري 2 ، فكم احتمال أن تكون قيمة تم اختيارها عشوائيا أقل من 27؟ | | | | |
| | A | 84% | | B | 97% |
| | C | 16% | | D | 25% |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | في توزيع طبيعي لمجموعة طلاب ، إذا كانت درجات 99% منهم تتراوح بين 49 , 13 ، فما قيمة الانحراف المعياري؟ | | | | |
| | A | 6 | | B | 10 |
| | C | 18 | | D | 31 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | إذا أجريت احصائية لطالبات مدرسة ، وكان 95% من الطالبات تتراوح أوزانهن بين 52kg و68kg ، فما الوسط الحسابي ؟ | | | | |
| | A | 59 | | B | 60 |
| | C | 61 | | D | 65 |

## 1 تمييز التجربة ذات الحدين

**تحقق من فهمك : صـ 332ـ**

حدد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين ، أو يمكن جعلها كذلك . وإذا كانت تجربة ذات حدين فاكتب قيم $n,p,q$ وقيم المتغير العشوائي الممكنة ، وإذا لم تكن كذلك فبين السبب

1A) أظهرت نتيجة لمسح إحصائي في إحدى المدارس ذات الزي الموحد أن 61% يحبون الزي الجديد ، وأن 24% لا يحبونه .إذا تم اختيار 20 طالبا بشكل عشوائي وسؤالهم عما إذا كانوا يحبون الزي الجديد . وكان المتغير العشوائي $X$ يدل على عدد الطلاب الذين يحبون الزي الجديد.

| n= | P= | q= |
|---|---|---|

1B) أجاب خالد عن اختبار مكون من 20 فقرة من نوع " الاختيار من متعدد " لكل فقرة منها أربع إجابات ، واحدة فقط صحيحة ( دون معرفة علمية بموضوع الاختبار) وكان المتغير العشوائي $X$ يدل على عدد الاجابات الصحيحة.

| n= | P= | q= |
|---|---|---|

**تدرب: صـ 334ـ**

حدد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين ، أو يمكن جعلها ذات حدين . وإن كانت كذلك ، فاكتب قيم $n,p,q$ ، ثم اكتب كل قيم المتغير العشوائي الممكنه . وإذا لم تكن تجربة ذات حدين فبين السبب:

1) تم ترقيم أوجه مكعب بالأرقام من 1 إلى 6 ، ثم ألقي المكعب 10 مرات ، والمتغير العشوائي $X$ يدل على عدد مرات ظهور الرقم 5.

| n= | P= | q= |
|---|---|---|

2) ألقيت قطعة نقد 20 مرة ، والمتغير العشوائي $X$ يدل على عدد مرات ظهور الكتابة.

| n= | P= | q= |
|---|---|---|

4) صندوق به 52 كرة ، منها 13 كرة حمراء ، و13 كرة زرقاء ، و13 كرة بيضاء ، و13 كرة صفراء . سحبت 10 كرات على التوالي دون إرجاع . والمتغير العشوائي $X$ يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة .

## 2 التوزيع ذو الحدين

تحقق من فهمك : صـ 332ـ

$$P(x) = {}_nC_X \; p^X \; q^{n-X} = \frac{n!}{(n-X)!\; X!}$$

2) كليات : يدرس في إحدى الكليات 48% من الطلاب لغة عالمية خلال سنة التخرج،إذا اختير 7 خريجين عشوائيا،وتم سؤالهم عما إذا درسوا لغة عالمية في سنتهم الأخيرة ، وكان المتغير العشوائي $X$ يدل على عدد الطلاب الذين أجابوا بنعم ، فكون التوزيع ذا الحدين ، ومثله بالأعمدة، ثم أوجد احتمال أن يجيب أقل من 4 طلاب بنعم.

| n= | P= | q= |
|---|---|---|

| $x$ | ${}_nC_X p^X q^{n-X}$ | $p(x)$ |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

.....

.....

تدرب: صـ 334ـ

لكل من التوزيعات ذات الحدين الآتية،يدل الرمز $n$ على عدد المحاولات، ويدل الرمز $p$ على احتمال نجاح كل محاولة . أوجد احتمال الحصول على $X$ من النجاحات:

20) $n = 6, p = 0.6, X \leq 4$

| n= | P= | q= |
|---|---|---|

| $x$ | ${}_nC_X p^X q^{n-X}$ | $p(x)$ |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 3 المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين

المتوسط: $\mu = n\,p$ | التباين : $\sigma^2 = n\,p\,q$ | الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq}$

تحقق من فهمك : صـ 332ـ

3) كليات:أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي في تحقق من فهمك 2،وفسر معنى المتوسط في سياق الموقف

| n= | P= | q= |
|---|---|---|

.....

.....

.....

.....

.....

تدرب: صـ 334ـ

كون توزيع ذا الحدين لكل متغير عشوائي ثم أوجد المتوسط وفسر معناه في سياق الموقف ثم أوجد التباين:

7) افادت دراسة احصائية أن 65% من طلاب الجامعات الذين يمتلكون سيارات يستعملون أحزمة الأمان في أثناء قيادة سياراتهم ، إذا تم اختيار8 طلاب عشوائيا ممن يمتلكون سيارات ، وسؤالهم إن كانوا يستعملون أحزمة الأمان في أثناء قيادة سياراتهم.

| n= | P= | q= |
|---|---|---|

.....

.....

.....

.....

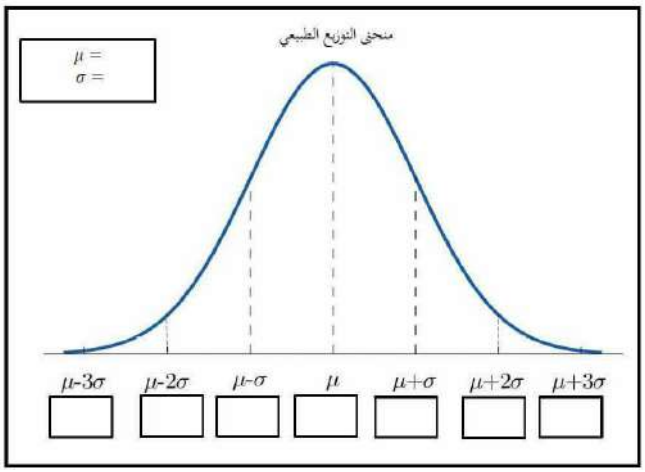
## 4 تقريب التوزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي:

في توزيع ذات الحدين عندما تمثل n عدد المحاولات,واحتمال النجاح p واحتمال الفشل q ويكون $np \geq 5$ ، $nq \geq 5$

يمكن تقريب توزيع ذات الحدين إلى توزيع طبيعي بمتوسط $\overline{x} = np$ و انحراف معياري $\sigma = \sqrt{npq}$

تحقق من فهمك : صـ 332ـ

4) أشارت دراسة سابقة إلى أن 32% من أولياء الأمور المستطلعة آراؤهم يرون أنه يجب تقليل عدد أيام الاجازة الصيفية للطلاب في نهاية العام الدراسي.غير أن آية ترى أن النسبة أقل من ذلك،ولذلك قامت بإجراء دراسة مسحية شملت 250 من أولياء الأمور أختارتهم بطريقة عشوائية ممن استهدفتهم الدراسة السابقة. ما احتمال ألا يرى أكثر من 65 من أولياء الأمورووجوب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية؟




| n= | P= | q= |
|---|---|---|

.....

.....

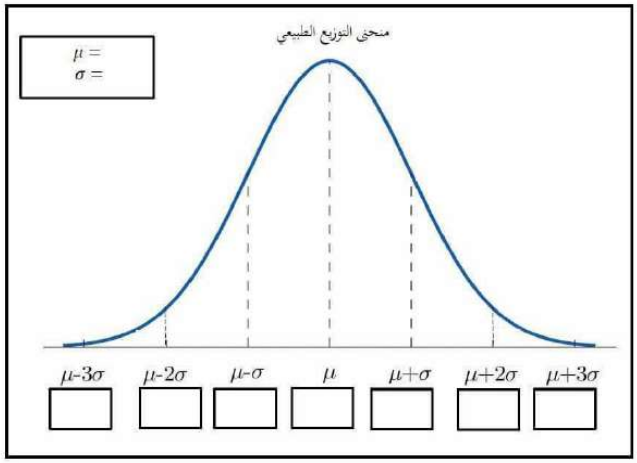
.....

.....

**تدرب: صـ 334ــ**

8) أعمال صيفية: تبين في دراسة سابقة أن 90% من طلاب الصفوف العليا في مدرسة ثانوية يحصلون على أعمال صيفية ، لكن منذرا قدر أن النسبة أقل من ذلك ، لذا قام بدراسة مسحية شملت 400 طالب من الصفوف العليا تم اختيارهم عشوائيا. ما احتمال ألا يكون أكثر من 348 من الطلاب المستهدفين حصلوا على عمل صيفي؟

| n= | P= | q= |
|---|---|---|




**مهارات التفكير العليا: صـ 335ــ**

24) تحد: في تقريب توزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي إذا علمت أن احتمال وجود 66-60 نجاحا يساوي 34 % وكان $\bar{x} = 60$ ، واحتمال النجاح 36% فكم كان عدد المحاولات؟

**الواجب:**

## تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | في تجربة ذات حدين ، إذا كان احتمال النجاح 40% ، وكان المتوسط 20 ، فكم كان عدد المحاولات؟ | | | | |
| | A | 30 | B | 40 | |
| | C | 50 | D | 70 | |
| 2 | أخبر الراصد الجوي أن احتمال سقوط المطر في كل يوم من الأيام العشر القادمة 40% ، أوجد التباين؟ | | | | |
| | A | $\sqrt{2.4}$ | B | 2.4 | |
| | C | 4 | D | 6 | |
| 3 | في تجربة ذات حدين ، إذا كان احتمال النجاح 35% ، وعدد المحاولات 4 ، فإن الوسط يساوي... | | | | |
| | A | 1.3 | B | 1.4 | |
| | C | 1.5 | D | 1.6 | |
| 4 | في حادثة ذات حدين ، إذا كان عدد المحاولات 20 ، وكان الوسط 12، فما قيمة الانحراف المعياري؟ | | | | |
| | A | $\sqrt{4.8}$ | B | 1.2 | |
| | C | $\sqrt{1.2}$ | D | 4.8 | |
| 5 | توزيع ذات حدين مقدار تباينه 25، ما قيمة انحرافه المعياري؟ | | | | |
| | A | 625 | B | 25 | |
| | C | 12.5 | D | 5 | |
| 6 | إذا كان نجاح عملية جراحية 90% ، فما احتمال نجاح عملية واحدة على الأقل إذا أجريت العملية 3 مرات؟ | | | | |
| | A | 0.001 | B | 0.1 | |
| | C | 0.9 | D | 0.999 | |

# الفصل الثامن

## النهايات والاشتقاق

- تقدير النهايات بيانيا
- حساب النهايات جبريا
- المماس والسرعة المتجهه
- المشتقات
- المساحة تحت المنحنى والتكامل
- النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

يتمحور علم التفاضل والتكامل حول مسألتين أساسيتين:

- ✓ ايجاد معادلة مماس منحنى دالة عند نقطة و اقعة عليه. ( وهذا هو التفاضل < الاشتقاق > )
- ✓ ايجاد مساحة المنطقة الو اقعة بين التمثيل البياني لدالة و المحور x. ( وهذا هو التكامل )

## 1 تقدير النهاية ( النهاية تساوي قيمة الدالة )

تحقق من فهمك : صـ 344ـ قدر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني ، ثم عززإجابتك باستعمال جدول قيم

(1A $\lim_{x\to -3}(1-5x)$

(1B $\lim_{x\to 1}(x^2-1)$

تدرب: صـ 351ـ قدر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني ، ثم عززإجابتك باستعمال جدول قيم

(1 $\lim_{x\to 5}(4x-10)$

## 2 تقدير النهاية ( النهاية لا تساوي قيمة الدالة)

تحقق من فهمك : صـ 345ـ قدر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني ، ثم عززإجابتك باستعمال جدول قيم

(2A $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2-4}$

(2B $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-4x-5}{x-5}$

تدرب: صـ351ـ قدر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني ، ثم عززإجابتك باستعمال جدول قيم

(4 $\lim_{x\to -2} \left(\frac{x^3+8}{x^2-4}\right)$

**تحقق من فهمك : صـ 346ـــ** قدر إن أمكن كلا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

(3A $\lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x), \lim_{x\to 1} f(x)$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & , \quad x < 1 \\ 2x + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

(3B $\lim_{x\to -2^-} g(x), \lim_{x\to -2^+} g(x), \lim_{x\to -2} g(x)$ حيث

$$g(x) = \begin{cases} -0.5x + 2 & , \quad x < -2 \\ -x^2 & , \quad x \geq -2 \end{cases}$$

**تدرب: صـ 351ـــ**

(15 $\lim_{x\to 0^-} (\sqrt{-x} - 7)$

(18 $\lim_{x\to -1} \frac{|x+1|}{x^2 - 1}$

## 4 النهايات والسلوك غير المحدد

إن عدم مقدرتنا على إيجاد قيمة نهاية الدالة f كعدد حقيقي عند الاقتراب من نقطة ثابتة ليس ناتجا بالضرورة عن عدم تساوي النهايتين من اليسار واليمين، إذا من الممكن أن تزداد قيم f(x) بشكل غير محدود عند اقتراب x من c ، وفي هذه الحالة نشير إلى النهاية بالرمز ∞، أما إذا تناقصت قيم f(x) بشكل غير محدود عند اقتراب قيم x من c ، فإننا نشير إلى النهاية بالرمز ∞-

**تحقق من فهمك : صـ 347ـ** قدر إن أمكن كلا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

(4A $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4}{x-3}$

(4B $\lim_{x\to 0}\frac{-2}{x^4}$

**السلوك غير المحدد** تعني زيادة أو نقصان f(x) بصورة غير محدودة عندما $x\to c$ ، أنه باختيار قيمة ل x قريبة من c بالقدر الذي نريد، فإنه يمكننا الحصول على قيمة كبيرة لـ $|f(x)|$ بالقدر الذي نريد، وكلما كانت x قريبة من c كانت $|f(x)|$ أكبر.

**النهايات غير المحددة**

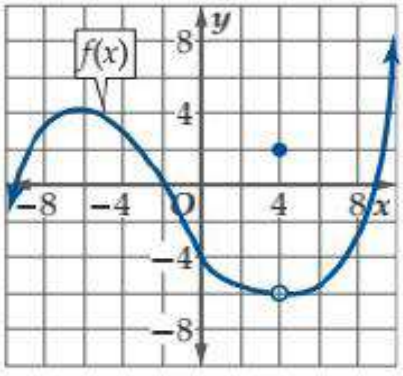
من الضروري أن نفهم أن العبارتين

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$

هما فقط وصف للحالة التي بسببها $\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة ، إذ لا يمثل الرمزان ∞ و∞- عددين حقيقيين

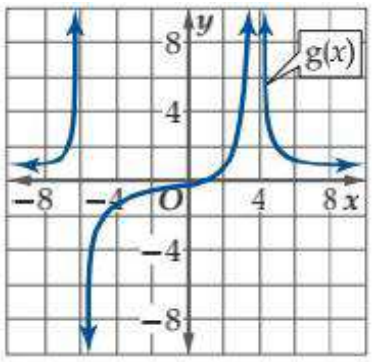
**تدرب: صـ 351ـ** قدر إن أمكن كلا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:




(21 $\lim_{x\to -4} f(x)$

(23 $\lim_{x\to 4} f(x)$

22) $\lim_{x\to 4} g(x)$




24) $\lim_{x\to -6} g(x)$

## 5 النهايات والسلوك التذبذبي

لا تكون النهاية موجودة أيضا عند تذبذب قيم f(x)بين قيمتين مختلفتين باقتراب قيم xمن العدد c

**السلوك التذبذبي**
عندما تتذبذب قيم f(x) بين قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c

**تحقق من فهمك : صـ 348ـ** قدر إن أمكن كلا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

5A) $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

5B) $\lim_{x\to 0} (x^2 \sin x)$

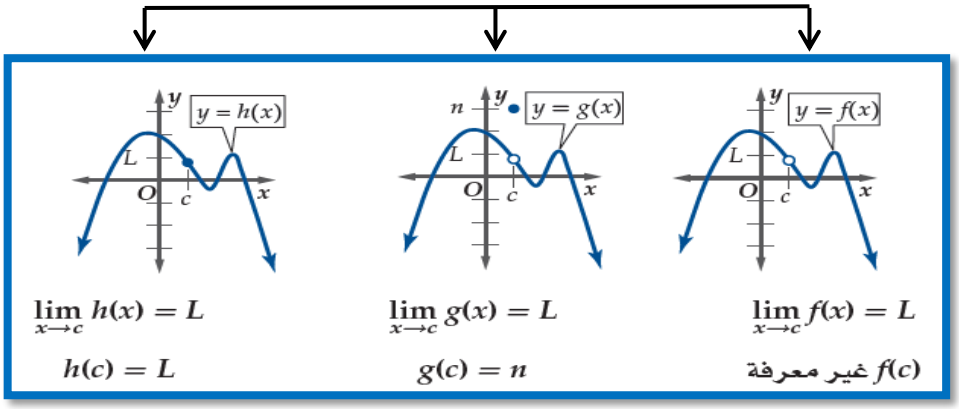
**تدرب: صـ 351ـ**

34) $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x}$

7) $\lim_{x\to 6}(x+\sin x)$

## 3 تقدير النهايات عند قيم محددة

لا تعتمد نهاية f(x) عنما تقترب x من العدد c على قيمة الدالة عند c




$\lim_{x\to c} h(x) = L$ , $h(c) = L$

$\lim_{x\to c} g(x) = L$ , $g(c) = n$

$\lim_{x\to c} f(x) = L$ , $f(c)$ غير معرفة

إن النهاية عند عدد لا تعني قيمة الدالة عند ذلك العدد ،
و إنما قيمة الدالة عندما تقترب x من ذلك العدد

النهاية من جهة واحدة

**النهاية من اليمين**

$\lim_{x\to c^+} f(x) = L_1$

وتقرأ: نهاية f(x) عندما x تقترب من c من اليمين هي $L_1$

**النهاية من اليسار**

$\lim_{x\to c^-} f(x) = L_2$

وتقرأ: نهاية f(x) عندما x تقترب من c من اليسار هي $L_2$

**النهاية من جهتين ( النهاية عند نقطة)**

تكون نهاية f(x) موجودة عندما تقترب x من c ،
إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين ،
أي أنه:

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{إذا وفقط إذا}$$

**النهاية من اليمين والنهاية من اليسار للدالة**

لمناقشة النهاية من اليمين لدالة عند C يجب أن نضمن أن الدالة معرفة على يمين C على فترة (c,b) ولمناقشة النهاية من اليسار لدالة عند c يجب أن نضمن أن الدالة معرفة على يسار c على فترة (a ,c)

## 6 تقدير النهاية عند المالانهاية

تستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة وهو سلوك الدالة عند ازدياد أو نقصان قيم x بشكل غير محدود

إذا اقتربت قيم f(x) من عدد وحيد $L_1$ عند ازدياد قيم x بشكل غير محدود، فإن :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L_1$$

وتقرأ نهاية f(x) عندما تقترب قيم x من موجب مالا نهاية هي $L_1$

إذا اقتربت قيم f(x) من عدد وحيد $L_2$ عند نقصان قيم x بشكل غير محدود، فإن :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L_2$$

وتقرأ نهاية f(x) عندما تقترب قيم x من سالب مالا نهاية هي $L_2$

*درست سابقا أنه إذا اقتربت قيم الدالة من ∞ أو ∞- عند اقتراب قيم x من عدد ثابت c ، فإن ذلك يعني وجود خط تقارب رأسي للدالة ، كما درست أن خط التقارب الأفقي يحدث عندما تقترب قيم الدالة من عدد حقيقي كلما اقتربت قيم x من ∞أو∞- ، بمعنى:

المستقيم x=c هو خط تقارب رأسي للدالة f إذا كانت

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty \text{ أو } \lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$$ أوكليهما

المستقيم y=c هو خط تقارب أفقي للدالة f إذا كانت

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = c \text{ أو } \lim_{x\to\infty} f(x) = c$$

**تنبيه: السلوك المتذبذب**

**إن التذبذب اللانهائي للدالة لا يعني بالضرورة عدم وجود النهاية عندما تقترب x من ∞− أو ∞**
**فإذا كان التذبذب بين قيمتين مختلفتين فالنهاية غيرموجودة أما إذا كان التذبذب متقاربا نحو عدد معين فالنهاية موجودة.**

تحقق من فهمك : صـ 349ـ قدركل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

(6A $\lim_{x\to\infty} (\frac{1}{x^4} - 3)$

(6B $\lim_{x\to-\infty} 5^x$

(6c $\lim_{x\to\infty} \sin x$

**تدرب: صـ 351ـ** قدركل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

29) $\lim_{x\to-\infty}(x^5-7x^4-4x+1)$

30) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-22}{4x^3-13}$

31) $\lim_{x\to\infty} x\cos x$

**يمكن استعمال التمثيل البياني أو جدول قيم لتقدير النهايات عند المالانهاية في كثير من المواقف الحياتية

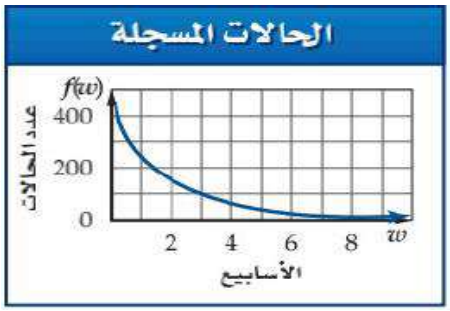
**تحقق من فهمك : صـ 350ـ**

7A ) كهرباء: يزود مقبس في منطقة ما بفرق جهد كهربائي يعطى بالعلاقة V(t)=165sin120 лt حيث t الزمن بالثواني. قدر $\lim_{t\to\infty} V(t)$ إذا كانت موجودة , وفسر معناها

7B) عند وضع عدد من ذبابات الفاكهة في وعاء يحوي حليبا وفاكهة وخميرة فإن عدد الذبابات بعد t يوم يعطى بالعلاقة $P(t)\frac{230}{1+56.5(2.7)^{-0.37t}}$ ، قدر $\lim_{t\to\infty} P(t)$ إذا كانت موجودة ، وفسر معناها

تدرب: صـ 351ـــ

53) **دواء:** تم توزيع لقاح للحد من عدوى مرض ما.
ويبين التمثيل البياني أدناه عدد الحالات المصابة بالمرض بعد wأسبوع من توزيع اللقاح.

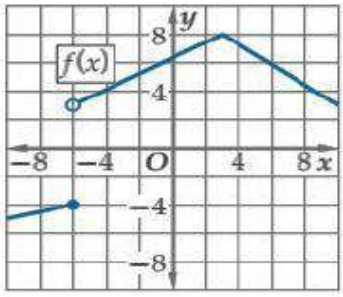



a ) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w\to 1} f(w)$ ، $\lim_{w\to 3} f(w)$

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w\to \infty} f(w)$ إذا كانت موجودة , وفسر النتيجة .

## مهارات التفكير العليا: صـ352ـــ

48) **اكتشف الخطأ:** قال علي : إن نهاية الدالة الممثلة بيانيا في الشكل أدناه عندما تقترب x من 6- هي 4- في حين قال محمد: إنها 3 هل أي منهما إجابته صحيحة؟ . برر إجابتك

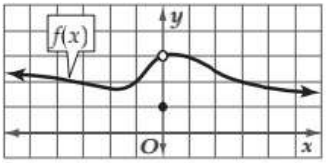
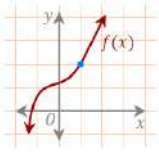
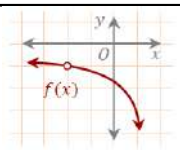
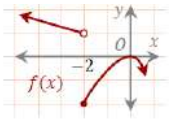



51) **تبرير:** حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائما أو صحيحة أحيانا أو غير صحيحة أبدا . برر إجابتك

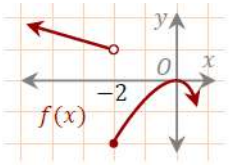
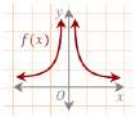
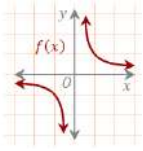
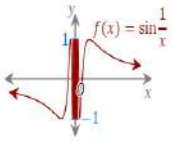
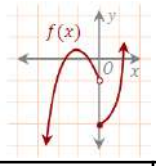
إذا كان : $f(c) = L$ ، فإن $\lim_{x\to c} f(x) = L$

## الواجب:

## تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | باستعمال التمثيل البياني للدالة y = f(x) أدناه، ما قيمة $\lim_{x\to 0} f(x)$ (إن وجدت) ؟  | | | | |
| | A | 0 | B | 1 | |
| | C | 3 | D | النهاية غير موجودة | |
| 2 | إذا كانت $g(x) = \frac{1}{x^2}$ وكانت العبارات :<br>I نقطة عدم اتصال لا نهائي<br>II نقطة عدم اتصال قفزي<br>III نقطة عدم اتصال قابل للإزالة<br>فأي مما يأتي يصف التمثيل البياني لمنحنى الدالة g(x)؟ | | | | |
| | A | I فقط | B | II فقط | |
| | C | I, III فقط | D | II, III فقط | |
| 3 | في الشكل نقدر: $\lim_{x\to 1} f(x)$ بـ..  | | | | |
| | A | $-1$ | B | 0 | |
| | C | 1 | D | 2 | |
| 4 | في الشكل نقدر: $\lim_{x\to -2} f(x)$ بـ..  | | | | |
| | A | $-2$ | B | $-1$ | |
| | C | 0 | D | غير موجودة | |
| 5 | في الشكل نقدر: $\lim_{x\to -2} f(x)$ بـ..  | | | | |
| | A | $-2$ | B | 0 | |
| | C | 1 | D | غير موجودة | |
| 6 | إذا كانت: $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -5$ و $f(x) = 7$ ، فإن قيمة $\lim_{x\to 3} f(x)$ تساوي.. | | | | |
| | A | 3 | B | 5 | |
| | C | 7 | D | غير موجودة | |

## تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | في الشكل نقدر: $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ بـ..  | | | | |
| | A | $-2$ | | B | $0$ |
| | C | $1$ | | D | غير موجودة |
| 8 | في الشكل نقدر: $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ بـ..  | | | | |
| | A | $-\infty$ | | B | $0$ |
| | C | $+\infty$ | | D | غير موجودة |
| 9 | في الشكل نقدر: $\lim_{x\to 0} f(x)$ بـ..  | | | | |
| | A | $-\infty$ | | B | $0$ |
| | C | $+\infty$ | | D | غير موجودة |
| 10 | في الشكل نقدر: $\lim_{x\to 0} f(x)$ بـ..  | | | | |
| | A | $-\infty$ | | B | $0$ |
| | C | $+\infty$ | | D | غير موجودة |
| 11 | يمكن وصف سلوك الطرف الأيسر للدالة $f(x)$ في الشكل: بـ.... :  | | | | |
| | A | $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$ | | B | $\lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty$ |
| | C | $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$ | | D | $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ |
| 12 | الدالة $f(x)$ معرفة كالتالي : $f(x)=\begin{cases} -x+3, & x<-1 \\ x^2, & x\geq -1 \end{cases}$ ، ما قيمة $\lim_{x\to -1} f(x)$ ؟ | | | | |
| | A | $-1$ | | B | $1$ |
| | C | $4$ | | D | غير موجودة |

تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | قيم $a$ التي تجعل الدالة : $f(x)=\begin{cases} a^2+2x\ , & x\geq 1 \\ a+4\ , & x<1 \end{cases}$ متصلة عند $x=1$ هي :..... | | | | |
| | A | $0,1$ | | B | $0\ ,-1$ |
| | C | $-1\ ,2$ | | D | $1\ ,-\ 2$ |

## 1 حساب النهاية عند نقطة

### خصائص النهايات

إذا كان k,c عددين حقيقيين ، n عددا صحيحا موجبا، وكانت النهايتان $\lim_{x\to c} f(x)$ , $\lim_{x\to c} g(x)$ موجودتين فإن كلا من الخصائص الآتية صحيحة:

*خاصية المجموع/ $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$

*خاصية الفرق/ $\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$

*خاصية الضرب في ثابت/ $\lim_{x\to c}[kf(x)] = \lim_{x\to c} kf(x)$

*خاصية الضرب/ $\lim_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x)\cdot \lim_{x\to c} g(x)$

*خاصية الضرب في ثابت/ $\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$ ,$\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$

*خاصية القوة/ $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$

*خاصية الجذر النوني/ $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$

إذا كان n عدد فردي أما إذا كان n عدد زوجي فلابد أن تكون $\lim_{x\to c} f(x) > 0$

**تنبيه**

إذا كانت f(c) ≤0

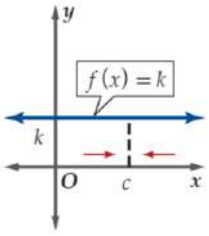
و n عددا زوجيا فإن

$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)}$ غيرموجودة

### نهايات الدوال

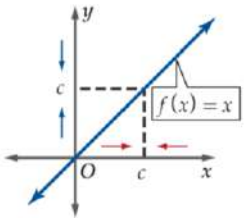
نهاية الدوال الثابتة

$\lim_{x\to c} k = k$




نهاية الدالة المحايدة

$\lim_{x\to c} x = c$




تحقق من فهمك : صـ 354ـ

استعمل خصائص النهايات لحساب نهاية كل مما يأتي

(1A $\lim_{x\to 2}(-x^3+4)$

(1B $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-3}{2x^2-x-15}\right)$

(1c $\lim_{x\to -1}\sqrt{x+3}$

**تدرب: صـ 361ـ**

استعمل خصائص النهايات لحساب نهاية كل مما يأتي

(2 $\lim_{x\to 5}\left(\frac{x^3+4x+13}{x-3}\right)$

(3 $\lim_{x\to 9}\left(\frac{1}{x}+2x+\sqrt{x}\right)$

(4 $\lim_{x\to -4}[x^2(x+1)+2]$

## 2 استعمال التعويض المباشر لحساب النهايات

### نهايات الدوال

نهايات دوال كثيرات الحدود

$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$$

نهايات الدوال النسبية

$$\lim_{x\to c}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}, q(x)\neq 0$$

****يشترط** لحساب نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية
من خلال التعويض المباشر, ألا يساوي مقام الدالة النسبية صفراً عند النقطة التي تُحسب عندها النهاية.

**تحقق من فهمك : صـ 355ـ**

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنا ، وإلا فاذكر السبب

(2A $\lim_{x\to 4}(x^3-3x^2-5x+7)$

(2B $\lim_{x\to -5}\frac{x+1}{x^2+3}$

(2C $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$

(2D $\lim_{x\to -8}\sqrt{x+6}$

**تدرب: صـ 361ـ**

(7 $\lim_{x\to 16}\frac{x^2+9}{\sqrt{x}-4}$

(8 $\lim_{x\to 2}(4x^3-3x^2+10)$

10) $\lim_{x\to 3}\sqrt{2-x}$

12) $\lim_{x\to 10}(-x^2+3x+\sqrt{x})$

## 3 استعمال التحليل لحساب النهايات

إذا قمنا بحساب نهاية دالة نسبية , ووصلنا إلى الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$
فنبسط العبارة جبرياً من خلال

تحليل كل من البسط والمقام واختصار العوامل المشتركة

إنطاق البسط أو المقام.
(الضرب في المرافق)

**تنبيه (التحليل)**
عند اختصار البسط بأكمله ،
فإنه يصبح 1 وليس0

**تحقق من فهمك : صـ 356ـ**

احسب كل نهاية مما يأتي

3A) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3-3x^2-4x+12}{x+2}$

3B) $\lim_{x\to 6}\frac{x^2-7x+6}{3x^2-11x-42}$

**تدرب: صـ 361ـ**

14) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$

18) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-2x-15}{x+3}$

## 4 استعمال إنطاق البسط أو المقام لحساب النهايات

**تنبيه**

مرافق العدد $\sqrt{x}-k$ هو $\sqrt{x}+k$

تحقق من فهمك : صـ 357ـ

احسب كل نهاية مما يأتي:

4A) $\lim\limits_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$

4B) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}$

تدرب: صـ 361ـ

احسب كل نهاية مما يأتي:

15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{\sqrt{x+1}-1}$

19) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$

## 5 نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالا نهاية

### نهايات دوال القوى

لأي عدد صحيح موجب n

إذا كان n زوجيا: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n=\infty$

إذا كان n فرديا:

$\lim\limits_{x\to\infty} x^n=\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$

### نهايات دوال كثيرات الحدود

إذا كانت $p(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$

دالة كثيرة حدود فإن

$$\lim_{x\to\infty}p(x)=\lim_{x\to\infty}a_nx^n$$
$$\lim_{x\to-\infty}p(x)=\lim_{x\to-\infty}a_nx^n$$

**الضرب في المالانهاية**

إذا كان $a>0$ فإن : $a(\infty)=\infty$ ، $-a(\infty)=-\infty$

تحقق من فهمك : صـ 358ـ

احسب كل نهاية مما يأتي

(5A $\lim_{x\to\infty}(-x^3-4x^2+9)$

(5B $\lim_{x\to-\infty}(4x^6+3x^5-x)$

(5c $\lim_{x\to-\infty}(2x-6x^2+4x^5)$

تدرب: صـ 361ـ

احسب كل نهاية مما يأتي

(20 $\lim_{x\to\infty}(5-2x^2+7x^3)$

(22 $\lim_{x\to\infty}(10x+14+6x^2-x^4)$

## 6 نهايات الدوال النسبية عند المالا نهاية

**نهاية دالة المقلوب**

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

**نهاية الدوال النسبية**

لأي عدد صحيح موجب n

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

**نهاية المتتابعات**

لأي عدد صحيح موجب n

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{n}=0$$

توجد ثلاث حالات عند حساب نهايات الدوال النسبية عندما تقترب $x$ من $\infty$

**إذا كانت**

درجة البسط أقل من درجة المقام

فإن النهاية صفر

**إذا كانت**

درجة البسط مساوية لدرجة المقام

فإن النهاية مساوية لناتج قسمة معاملي

الحدين الرئيسين في البسط والمقام

**إذا كانت**

درجة البسط أكبر من درجة المقام

فإن النهاية إما $\infty$ أو $-\infty$ ، بحسب إشارة

الحد الرئيس في كل من البسط والمقام

تحقق من فهمك : صـ 359ـ

احسب كل نهاية مما يأتي:

(6A $\lim_{x\to\infty} \frac{5}{x-10}$

(6B $\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+7}{5x+1}$

(6c $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3-3x^2+1}{2x^3+4x}$

تدرب: صـ 361ـ

احسب كل نهاية مما يأتي:

(21 $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-10x+2}{4x^3+20x^2}$

(23 $\lim_{x\to\infty} \frac{14x^3-12x}{4x^2+13x-8}$

(24 $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^3+2x-11}{-x^5+17x^3+4x}$

## 7 نهايات المتتابعات

تحقق من فهمك : صـ 360ـ

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إن وجدت:

(7A $a_n = \frac{4}{n^2+1}$

(7B $b_n = \frac{2n^3}{3n+8}$

7c) $c_n = \frac{9}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

**تدرب: صـ 361ـ** احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إن وجدت:

27) $a_n = \frac{8n+1}{n^2-3}$

29) $a_n = \frac{12n^2+2}{6n^2-1}$

**مهارات التفكير العليا: صـ362ـ**

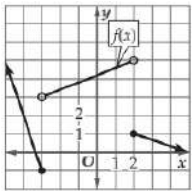
50) تبرير: إذا كانت r(x) دالة نسبية فهل العلاقة

$$\lim_{x\to c} r(x) = r(c)$$

صحيحة دائما أو صحيحة أحيانا أو غير صحيحة أبدا . برر إجابتك

**الواجب:**

تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ما قيمة $\lim_{h\to 0}\frac{2h^3-h^2+5h}{h}$ ؟ | | | | |
| | A | 3 | | B | 4 |
| | C | 5 | | D | النهاية غير موجودة |
| 2 | ما القيمة التي تقترب منها $g(x)=\frac{x+\pi}{\cos(x+\pi)}$ عندما تقترب x من 0؟ | | | | |
| | A | $-\pi$ | | B | $\frac{-3}{4}$ |
| | C | $\frac{-1}{2}\pi$ | | D | 0 |
| 3 | باستعمال التمثيل البياني للدالة f أدناه ، ما قيمة $\lim_{h\to 2^+} f(x)$ ؟  | | | | |
| | A | 0 | | B | 1 |
| | C | 5 | | D | غير موجودة |
| 4 | $\lim_{x\to 5}(3x^3-5x^2-3x-10)$ تساوي .... | | | | |
| | A | 125 | | B | 225 |
| | C | 275 | | D | 235 |
| 5 | ما قيمة $\lim_{x\to 0}(4^x-\cos x+2x-1)$ ؟ | | | | |
| | A | $-2$ | | B | $-1$ |
| | C | 1 | | D | 2 |
| 6 | ما قيمة $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{7}}{x-3}$ ؟ | | | | |
| | A | $3+\sqrt{7}$ | | B | $3-\sqrt{7}$ |
| | C | $\sqrt{7}-3$ | | D | 3 |
| 7 | ما قيمة $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+6}{x-1}$ ؟ | | | | |
| | A | 4 | | B | 0 |
| | C | $-2$ | | D | $-4$ |

تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | ما قيمة $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$؟ | | | | |
| | A | 0 | B | 6 | |
| | C | 4 | D | 8 | |
| 9 | $\lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$ تساوي .... | | | | |
| | A | $-5$ | B | 0 | |
| | C | 10 | D | 25 | |
| 10 | $\lim_{x\to -\infty}(x^3-2x^2+5x-1)$ تساوي .... | | | | |
| | A | $-\infty$ | B | 0 | |
| | C | 2 | D | $+\infty$ | |
| 11 | $\lim_{x\to \infty}(x^2+x+2)$ تساوي .... | | | | |
| | A | $-\infty$ | B | 0 | |
| | C | 1 | D | $\infty$ | |
| 12 | $\lim_{x\to -\infty}(4x^6+3x^5-x)$ تساوي .... | | | | |
| | A | $-\infty$ | B | 0 | |
| | C | 2 | D | $+\infty$ | |
| 13 | $\lim_{x\to -\infty}\frac{7x^3+1}{x^2+4x}$ تساوي ..... | | | | |
| | A | 7 | B | $\frac{7}{4}$ | |
| | C | $-\infty$ | D | $+\infty$ | |
| 14 | ما قيمة $\lim_{x\to \infty}\frac{10x^3-12x}{5+3x^2-2x^3}$ ؟ | | | | |
| | A | $-5$ | B | $-2$ | |
| | C | 2 | D | 5 | |
| 15 | $\lim_{x\to 5}x^5$ تساوي .... | | | | |
| | A | $-\infty$ | B | 0 | |
| | C | 2 | D | $+\infty$ | |

تحصيلي رياضيات

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | النهاية : $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{2x+5}$ تساوي .... | | | | | |
| | A | $-\frac{1}{5}$ | | B | 0 | |
| | C | $\frac{3}{2}$ | | D | $\infty$ | |
| 17 | إذا كان : $\lim_{x\to\infty}\frac{Ax}{3+\lvert x\rvert}$ فما قيمة A ؟ | | | | | |
| | A | 6 | | B | 2 | |
| | C | $-2$ | | D | $-6$ | |
| 18 | ما قيمة $\lim_{x\to0}(x^3\cos x)$ ؟ | | | | | |
| | A | 0 | | B | 1 | |
| | C | 2 | | D | 3 | |
| 19 | النهاية : $\lim_{x\to-1}\frac{4-\sqrt{x^2+x+16}}{x^3-1}$ تساوي .... | | | | | |
| | A | $\frac{1}{8}$ | | B | $\frac{1}{12}$ | |
| | C | $\infty$ | | D | 0 | |
| 20 | $\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ تساوي .... | | | | | |
| | A | $\frac{1}{9}$ | | B | $\frac{1}{6}$ | |
| | C | 0 | | D | غير موجودة | |
| 21 | ما قيمة $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^4-2}{5x^4+3x^3-2x}$ ؟ | | | | | |
| | A | 10 | | B | 5 | |
| | C | 2 | | D | 0 | |
| 22 | ما قيمة $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x^3}{2x^3+5}$ ؟ | | | | | |
| | A | $\frac{3}{2}$ | | B | 1 | |
| | C | $-1$ | | D | $\frac{-3}{2}$ | |

## 1 ميل المماس للمنحنى عند نقطة عليه

### معدل التغير اللحظي

معدل التغير اللحظي للدالة f عند النقطة (x , f(x)) هو ميل المماس m عند النقطة ((x ,f(x)

ويعطى بالصيغة $m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ بشرط أن تكون النهاية موجودة.

يمكن استعمال صيغة معدل التغير اللحظي لإيجاد ميل مماس منحنى عند نقطة عليه

**معدل التغير اللحظي**

عند حساب نهاية ميل المستقيم القاطع عندما $h\to 0$ فإن الحدود الباقية بعد إجراء الاختصارات والتي تحتوي المتغير h ستصبح أصفارا.

**تحقق من فهمك : صـ 366ـ** أوجد ميل مماس كل منحنى مما يأتي عند النقطة المعطاة :

1A) $y = x^2, (3,9)$

1B) $y = x^2 + 4, (-2,8)$

**تدرب: صـ369ـ** أوجد ميل مماس كل منحنى مما يأتي عند النقطة المعطاة :

1) $y = x^2 - 5x, (1,-4), (5,0)$

3) $y = \frac{3}{x}, (1,3), (3,1)$

## 2 ميل المنحنى عند أي نقطة عليه

يمكن استعمال صيغة معدل التغير اللحظي لإيجاد معادلة ميل المنحنى عند نقطة (x , f(x))عليه

**تحقق من فهمك : صـ 366ـــ**

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه :

(2A $y = x^2 - 4x + 2$

(2B $y = x^3$

**تدرب: صـ 369ـــ**

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه :

(5 $y = 4 - 2x$

(8 $y = \frac{1}{x^2}$

## 3 السرعة المتوسطة المتجهة

إذا أعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن f(t) ، فإن السرعة المتوسطة المتجهه للجسم $v_{avg}$ في الفترة الزمنية من a إلى b تعطى بالعلاقة $v_{avg} = \frac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

**موقع الجسم**

موقع الجسم عادة يعطى بالعلاقة y=f(x) وذلك لتحديد الموقع في المستوى بدلالة الإحداثين x,y أما إذا أعطي بوصفه دالة في الزمن t، فهذا يعني الإزاحة (محصلة المركبة x والمركبة y ) لموقع الجسم عند اللحظة t ، وإذا كانت الحركة على خط مستقيم فإن دالة الموقع تكون نفسها دالة المسافة مع أخذ الاتجاه بعين الاعتبار.

**تحقق من فهمك : صـ 367ـ**

3) تمثل $h(t) = 5 + 65t - 16t^2$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لبالون يصعد رأسيا، ما السرعة المتوسطة المتجهة للبالون بين t = 1s ،t =2s؟

**تدرب: صـ 369ـ**

12) تمثل s(t) في كل مما يأتي بعد جسم متحرك عن نقطة ثابتة بالأميال بعد tدقيقة .أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للجسم بالميل لكل ساعة في الفترة الزمنية المعطاة.(تذكر بأن تحول الدقائق إلى ساعات) $s(t) = 0.4t^2 - \frac{1}{20}t^3 \ , \ 3 \le t \le 5$

## 4 السرعة المتجهه اللحظية عند لحظة زمنية معينة

إذا أعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن f(t) ، فإن السرعة المتجهة اللحظية v(t) لذلك الجسم عند الزمن t تعطى بالصيغة $v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$. بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة

**تحقق من فهمك : صـ 368ـ**

4) سقطت علبة مادة التنظيف من يد عامل في أثناء قيامه بتنظيف نافذة بناية على ارتفاع 1400ft عن سطح الأرض ،وتمثل الدالة $h(t) = 1400 - 16t^2$ ارتفاع العلبة بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها . أوجد السرعة المتجهة اللحظية للعلبة v(t) بعد 7s

**تدرب: صـ 369ــ**

17) تمثل f(t) في كل مما يأتي بعد جسم متحرك عن نقطة ثابتة بالأقدام بعد t ثانية .أوجد السرعة المتجهة اللحظية لهذا الجسم عند الزمن المعطى: $t = 3$ ,$f(t) = 100 - 16t^2$

## 5 السرعة المتجهه اللحظية عند أي لحظة زمنية

يمكن إيجاد معادلة للسرعة المتجهة اللحظية عند أي زمن

**تحقق من فهمك : صـ 368ــ**

5) تمثل الدالة $s(t) = 90t - 16t^2$ ارتفاع الصاروخ بعد t ثانية من إطلاقه رأسيا من مستوى سطح البحر ، حيث الارتفاع بالأقدام . أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية v(t) للصاروخ عند أي زمن

**تدرب: صـ 369ــ**

23) تمثل s(t) في كل مما يأتي المسافة التي يقطعها جسم متحرك. .أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية v(t) للجسم عند أي زمن :
$s(t) = 14t^2 - 7$

**مهارات التفكير العليا: صـ370ـ**

34) **تحد**: أوجد معادلة ميل مماس منحنى: $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x$ عند أي نقطة عليه

35) **تبرير**: هل العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة ( يقطع المماس منحنى الدالة عند نقطة التماس فقط )؟. برر إجابتك

**الواجب:**

تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | مامعادلة ميل منحنى $y = 2x^2$ عند أي نقطة عليه؟ | | | | |
| | A | $m = 4x$ | | B | $m = x$ |
| | C | $m = 2x$ | | D | $m = -4x$ |
| 2 | مامعادلة ميل منحنى $y = x^5 + 3x - 2$ عند أي نقطة عليه؟ | | | | |
| | A | $5x^4 + 3$ | | B | $4x^4 + 3x$ |
| | C | $x^4 + 1$ | | D | $x^4 + 3$ |
| 3 | ما ميل مماس منحنى $y = x^3 + 7$ عند النقطة (3,34)؟ | | | | |
| | A | $-9$ | | B | 27 |
| | C | 9 | | D | 34 |
| 4 | سقطت كرة بشكل رأسي ، فكانت المسافة التي تقطعها بالأقدام بعد t ثانية تعطى بالدالة $d(t)=16t^2$ إذا كانت $\lim_{h\to 0}\frac{d(2+h)-d(2)}{h}$ تمثل السرعة المتجهة للكرة بعد 2s ، فكم تساوي هذه السرعة ؟ | | | | |
| | A | 46ft/s | | B | 58ft/s |
| | C | 64ft/s | | D | 72ft/s |
| 5 | ميل المماس للدالة $f(x) = 2x - 5$ عند النقطة (1, -3) | | | | |
| | A | 1 | | B | 2 |
| | C | - 3 | | D | $-5$ |
| 6 | مامعادلة ميل منحنى $y = \sqrt{2x}$ عند أي نقطة عليه؟ | | | | |
| | A | $\sqrt{2x+1}$ | | B | $\frac{\sqrt{2x}}{x}$ |
| | C | $\sqrt{2x} - \sqrt{x}$ | | D | $\frac{1}{\sqrt{2x}}$ |
| 7 | ميل المماس للدالة $f(x) = x^2$ عند النقطة (1, 1) | | | | |
| | A | 2 | | B | 4 |
| | C | 6 | | D | 8 |

## 1 مشتقة دالة عند أي نقطة

تُسمى دالة المماس التي أوجدناها سابقا " دالة مشتق" أو "مشتقة الدالة"

ويُرمز لها بالرمز $f'(x)$

وتُسمى عملية ايجاد المشتقة بالاشتقاق وتُسمى النتيجة معادلة تفاضلية.

**المشتقات**

يقرأ الرمز $f'(x)$ مشتقة الدالة $f$ بالنسبة للمتغير $x$

$f$ prime of $x$ أو

**تحقق من فهمك : صـ 372ـ** أوجد مشتقة f(x) باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة:

1A) $f(x) = 6x^2 + 7\ , x = 2{,}5$

1B) $f(x) = -5x^2 + 2x - 12, x = 1{,}4$

**تدرب: صـ 378ـ** أوجد مشتقة f(x) باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة:

2) $g(t) = -t^2 + 2t + 11\ ,t = 5{,}3$

يرمز لمشتقة $y = f(x)$ أيضا بالرموز $\dot{y}\ ,\ \frac{df}{dx}\ ,\ \frac{dy}{dx}$

وإذا سبق المعادلة المؤثر التفاضلي $\frac{d}{dx}$ فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة

## 2 قاعدة مشتقة القوى

**مشتقة القوة**

إذا كان $f(x) = x^n$
فإن $f'(x) = nx^{n-1}$
حيث n عدد حقيقي

**مشتقة العدد الثابت**

إذا كانت $f(x) = c$
فإن $f'(x) = 0$
حيث c عدد ثابت

**تنبيه (مشتقات القوى السالبة)**

مشتقة $f(x) = x^{-4}$ ليست $f'(x) = -4x^{-3}$

تذكر بأننا يجب أن نطرح واحدا من الأس لنحصل على :

$-4 - 1 = -4 + (-1) = -5$

لذا فإن $f'(x) = -4x^{-5}$

**تحقق من فهمك : صـ 373ـ** أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

(2A $j(x) = x^4$

(2B $k(x) = \sqrt{x^3}$

(2C $m(x) = \frac{1}{x^5}$

**تدرب: صـ 377ـ** أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

(6 $y(f) = -11f$

**المشتقات**

إذا كانت: $f(x) = x$
فإن: $f'(x) = 1$
وإذا كانت: $f(x) = cx$
فإن $f'(x) = c$

## 3 قواعد للاشتقاق

**مشتقة مضاعفات القوة**

إذا كانت $f(x) = cx^n$ فإن $f'(x) = cnx^{n-1}$

حيث c ثابت , n عدد حقيقي

**مشتقة المجموع أو الفرق**

إذا كانت $f(x) = g(x) + h(x)$

فإن $f'(x) = g'(x) + h'(x)$

**تحقق من فهمك : صـ 374ـ**

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

3A) $f(x) = 2x^5 - x^3 - 102$

3B) $g(x) = 3x^4(x + 2)$

3C) $f(x) = \frac{4x^4 - 3x^2 + 5x}{x}$

**تدرب: صـ 377ـ**

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

7) $z(n) = 2n^2 + 7n$

9) $b(m) = 3m^{\frac{2}{3}} - 2m^{\frac{3}{2}}$

10) $n(t) = \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} + \frac{2}{t^3} + 4$

## 4 السرعة المتجهة اللحظية

**تحقق من فهمك : صـ 374ـ**

4) الدالة $h(t) = 55t - 16t^2$ تمثل الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لكرة قذفت رأسيا إلى أعلى، أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية للكرة عند أي زمن؟

**تدرب: صـ 377ـ**

14) تعطى درجة حرارة إحدى المدن بالفهرنهايت في أحد الأيام بالدالة: $f(h) = -0.0036h^3 - 0.01h^2 + 2.04h + 52$

حيث h عدد الساعات التي انقضت من ذلك اليوم,

a) أوجد معادلة تمثل معدل التغير اللحظي لدرجة الحرارة.

b) أوجد معدل التغير اللحظي لدرجة الحرارة عندما: $h = 2,14,20$

c) أوجد درجة الحرارة العظمى في الفترة: $0 \le h \le 24$

## 5 القيمتان العظمى والصغرى للدالة

إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ فإن لها قيمة عظمى وصغرى على الفترة $[a,b]$ وذلك إما عند إحدى طرفي الفترة أو عند إحدى النقاط الحرجة.

النقطة الحرجة / هي النقطة التي تكون عندها مشتقة الدالة تساوي صفراً أو غير موجودة

**دالة كثيرة الحدود**

مجال تعريف دالة كثير الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية لذلك إذا كانت المشتقة دالة كثيرة حدود ، فإن النقاط الحرجة توجد فقط عندما تكون المشتقة صفرا.

ولذلك عند إيجاد القيم العظمى والصغرى لدالة كثيرة حدود $f(x)$ على فترة $[a,b]$ نجد قيم الدالة عند طرفي الفترة وعند أي قيمة لـ $x$ عندها $f'(x)=0$

**تحقق من فهمك : صـ 375ـ**

5) الدالة $h(t)=20t^2-160t+330$

تمثل ارتفاع سعد بالأقدام في أثناء مشاركته في قفزة البنجي ( القفز من أماكن مرتفعة ، بحيث تكون القدمان موثقتين بحبل مطاطي) حيث t الزمن بالثواني في الفترة $[0,6]$ أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه سعد في هذه الفترة الزمنية.

**تدرب: صـ 369ـ**

استعمل الاشتقاق لإيجاد النقاط الحرجة ، ثم أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى لكل دالة مما يأتي على الفترة المعطاة.

15) $f(x)=2x^2+8x\ ,[-5\ ,0]$

16) $f(x)=t^4+6t^2-2\ ,[1\ ,4]$

## 6 قاعدة مشتقة الضرب

### مشتقة الضرب

إذا كانت مشتقة كل من الدالتين f , g موجودتين عند x فإن

$$\frac{d[f(x)g(x)]}{dx} = f(\grave{x})g(x) + f(x)g(\grave{x})$$

**قاعدة مشتقة الضرب**

ينتج عن قاعدة مشتقة الضرب مقدار يمكن تبسيطه ويمكنك أيضا تركه على حاله من دون تبسيط ما لم تكن في حاجة إلى تبسيط

**تحقق من فهمك : صـ 376ـ** أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

(6A $h(x) = (x^5 + 13x^2)(7x^3 - 5x^2 + 18)$

(6B $h(x) = (x^2 + x^3 + x)(8x^2 + 3)$

**تدرب: صـ 377ـ** أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

(23 $g(x) = (3x^4 + 2x)(5 - 3x)$

(24 $s(t) = (\sqrt{t} + 2)(3t^{11} - 4t)$

## 1 مشتقة دالة عند أي نقطة

تُسمى دالة المماس التي أوجدناها سابقا " دالة مشتق" أو "مشتقة الدالة"

ويُرمز لها بالرمز $f'(x)$

وتُسمى عملية ايجاد المشتقة بالاشتقاق وتُسمى النتيجة معادلة تفاضلية.

**المشتقات**

يقرأ الرمز $f'(x)$ مشتقة الدالة $f$ بالنسبة للمتغير $x$

$f$ prime of $x$ أو

**تحقق من فهمك : صـ 372ـ** أوجد مشتقة f(x) باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة:

1A) $f(x) = 6x^2 + 7\ , x = 2{,}5$

1B) $f(x) = -5x^2 + 2x - 12, x = 1{,}4$

**تدرب: صـ 378ـ** أوجد مشتقة f(x) باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة:

2) $g(t) = -t^2 + 2t + 11\ ,t = 5{,}3$

يرمز لمشتقة $y = f(x)$ أيضا بالرموز $\dot{y}\ ,\ \frac{df}{dx}\ ,\ \frac{dy}{dx}$

وإذا سبق المعادلة المؤثر التفاضلي $\frac{d}{dx}$ فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة

مهارات التفكير العليا: صـ379ـ

35) تحد: أوجد $f(y)$ علما بأن:

$$f(y) + 10x^2y^3 + 5xz^2 - 6xy^2 + 8x^5 - 11x^8yz^7$$

.....

.....

.....

.....

46) اكتشف الخطأ: قام كل من أحمد وعبدالله بإيجاد $[f(x)]^2$ للدالة $f(x) = 6x^2 + 4x$ حيث كانت إجابة عبدالله : $144x^2 + 96x + 16$ في حين كانت إجابة أحمد: $144x^3 + 144x^2 + 32x$ فأيهما كانت إجابته صحيحة برر إجابتك

.....

.....

.....

.....

الواجب:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ما مشتقة $h(x) = (-7x^2 + 4)(2 - x)$؟ | | | | |
| | A | $\grave{h}(x) = -14x$ | | B | $h(\grave{x}) = 14x$ |
| | C | $h(\grave{x}) = -21x^2 - 28x + 4$ | | D | $h(\grave{x}) = 21x^2 - 28x - 4$ |
| 2 | ما ميل مماس منحنى $y = 2x^2$ عند النقطة (1,2) | | | | |
| | A | 1 | | B | 2 |
| | C | 4 | | D | 8 |
| 3 | ما مشتقة: $f(x) = 5\sqrt[3]{x^8}$؟ | | | | |
| | A | $f(\grave{x}) = \frac{40}{3}x^{\frac{5}{3}}$ | | B | $f(\grave{x}) = \frac{40}{3}x^{\frac{8}{3}}$ |
| | C | $f(\grave{x}) = 255x^{\frac{5}{3}}$ | | D | $f(\grave{x}) = 225x^{\frac{8}{3}}$ |
| 4 | مشتقة الدالة: $f(x) = -2$ تساوي ... | | | | |
| | A | -2 | | B | 0 |
| | C | 2 | | D | $2x$ |
| 5 | إذا كانت: $g(x) = \sqrt[5]{x^9}$ فإن $g(\grave{x})$ تساوي ... | | | | |
| | A | $9\sqrt[5]{x^8}$ | | B | $5\sqrt[4]{x^9}$ |
| | C | $\frac{5}{9}\sqrt[5]{x^4}$ | | D | $\frac{9}{5}\sqrt[5]{x^4}$ |
| 6 | إذا كانت: $f(x) = 3x^2 - 5x + 12$ فإن مشتقة الدالة $f(x)$ تساوي ... | | | | |
| | A | $3x - 5$ | | B | $6x^2 - 5$ |
| | C | $6x^2 - 5x$ | | D | $6x - 5$ |
| 7 | إذا كانت: $f(x) = 3x^{\frac{4}{3}} + 6x^{\frac{1}{2}} - 10$ فإن $f(\grave{x})$ تساوي ... | | | | |
| | A | $4x^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{2}}$ | | B | $4\sqrt[3]{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$ |
| | C | $3x^{\frac{7}{3}} + 3x^{\frac{1}{2}}$ | | D | $4\sqrt[4]{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$ |
| 8 | ما مشتقة الدالة: $f(x) = 15x^2 - 5x + 7$ عند $x = 1$؟ | | | | |
| | A | 32 | | B | 25 |
| | C | 17 | | D | 10 |

تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | للدالة : $f(x) = 8x - x^2 + 30$ نقطة حرجة عندما $x$ تساوي ... | | | | |
| | A | $-4$ | | B | $-\frac{1}{4}$ |
| | C | $\frac{1}{4}$ | | D | $4$ |
| 10 | إذا كانت $f(x) = (x^2 - 4)(2x - 5)$ فإن $f'(x)$ تساوي ... | | | | |
| | A | $4x^2 - 10x$ | | B | $x^2 - 8$ |
| | C | $6x^2 - 10x - 8$ | | D | $2x^2 - 10x - 4$ |
| 11 | إذا كانت $f(x) = \frac{7}{x+5}$ فإن $f'(x)$ تساوي ... | | | | |
| | A | $\frac{-7}{x+5}$ | | B | $\frac{7}{x+5}$ |
| | C | $\frac{-7}{(x+5)^2}$ | | D | $\frac{7}{(x+5)^2}$ |
| 12 | ما المشتقة السادسة للدالة: $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^2 + 7x - 12$ ؟ | | | | |
| | A | -1 | | B | 0 |
| | C | 1 | | D | 3 |
| 13 | ما المشتقة الثانية للدالة: $f(x) = 2x^5 - x^3 + 6$ ؟ | | | | |
| | A | $10x^4 - 3x^2$ | | B | $40x^4 - 6x$ |
| | C | $40x^3 - 6$ | | D | $40x^3 - 6x$ |
| 14 | إذا كانت $f(x) = \frac{5\sqrt{x^3}}{2-x}$ فإن $f'(4)$ تساوي ... | | | | |
| | A | $\frac{31}{8}$ | | B | $\frac{15}{6}$ |
| | C | $\frac{5}{2}$ | | D | $\frac{16}{4}$ |

## 1 المساحة تحت المنحنى باستعمال المستطيلات

العديد من الأشكال المركبة لا تتكون من أشكال أساسية
مما يستدعي الحاجة إلى طريقة عامة لحساب مساحة أي شكل ثنائي الأبعاد ..
يمكننا تقريب حساب مساحة شكل غير منتظم من خلال استعمال شكل أساسي معلوم المساحة كالمستطيل

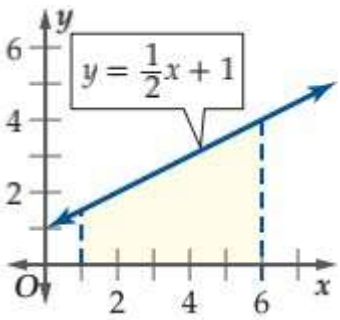
**تحقق من فهمك : صـ 381ـ**

1)قرب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 24x$ والمحور x على الفترة $[0, 24]$ باستعمال 6, 8, 12 مستطيلا على الترتيب . استعمل الطرف الأيمن لقاعد كل مستطيل لتحديد ارتفاعه

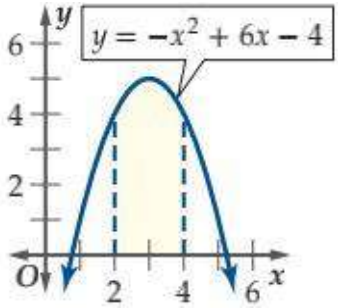
**تدرب: صـ387ـ**

قرب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى الدالة مستعملا الطرف المعطى لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عددها في كل من الأشكال أدناه:

1) 5 مستطيلات الطرف الأيمن




2) 4 مستطيلات الطرف الأيسر



## 2 المساحة تحت المنحنى باستعمال الأطراف اليمنى واليسرى للمستطيلات

من الممكن الحصول على تقريب أفضل للمساحة في بعض الأحيان
باستعمال كل من الأطراف اليمنى واليسرى لقواعد المستطيلات ، ثم أخذ الوسط للتقريبين

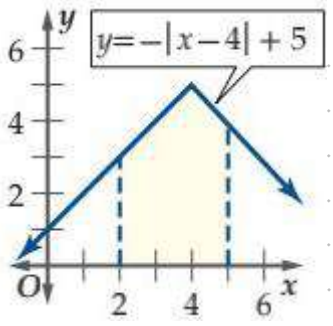
**تحقق من فهمك : صـ 382ـــ**

2)قرب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)=\frac{12}{x}$ والمحور x على الفترة [ 1 , 5 ] باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعها ، ثم احسب الوسط للتقريبين.

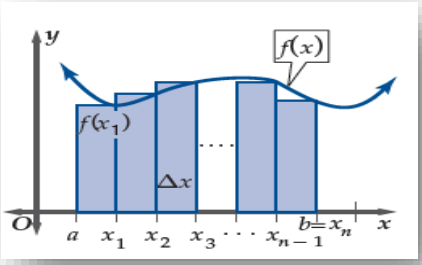
**تدرب: صـ 387ـــ**

**قرب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى الدالة في كل من الأشكال الآتية مستعملا الأطراف اليمنى ثم اليسرى لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عرض كل منها، ثم أوجد الوسط للتقريبين.**

7) العرض 0.5



## 3 المساحة تحت المنحنى باستعمال التكامل




**التجزئ المنتظم**:تقسيم الفترة من a إلى b إلى n من الفترات الجزئية المتساوية الطول

المساحة الكلية للمستطيلات $A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

### التكامل المحدد

يعبرعن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحورx في الفترة [a ,b] بالصيغة

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x, \Delta x = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i\Delta x$$

حيث a الحد الأدنى وb الحد الأعلى ،وتسمى هذه الطريقة مجموع ريمان الأيمن

### صيغ المجاميع

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn, \text{عدد ثابت } c \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}$$

رمز التكامل المحدد

$\int_a^b f(x)dx$ يقرأ الرمز

التكامل من a إلى b للدالة f(x) بالنسبة لـx

تنبيه (المجموع)

إن مجموع عدد ثابت c هو cn فمثلا

$$\sum_{i=1}^{n} 5 = 5n$$

خاصيتا المجموع الآتيتان لحساب بعض التكاملات:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} ci = c\sum_{i=1}^{n} i, \text{عدد ثابت } c$$

تحقق من فهمك : صـ 384ـــ

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

3A) $\int_0^1 3x^2 dx$

3B) $\int_0^3 x\, dx$

**تدرب: صـ 387ــ**

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

11) $\int_0^2 6x \ dx$

**تحقق من فهمك : صـ 385ــ**

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

4A) $\int_1^3 x^2 dx$

(4B $\int_2^4 x^3 dx$

تدرب: صـ 387ـ

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

(10 $\int_1^4 4x^2 dx$

## 5 المساحة تحت منحنى

**تحقق من فهمك : صـ 386ـــ**

5)لدى عبدالله كمية من الطلاء تكفي لطلاء $30ft^2$ ،هل تكفي هذه الكمية لطلاء جزأين من جدار مساحة كل منهما بالقدم المربعة تعطى بالتكامل $\int_0^5 (5 - 0.2x^2)dx$ ؟ برر إجابتك

**تدرب: صـ 387ـــ**

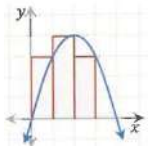
18) ارجع إلى فقرة لماذا في بداية الدرس. إذا زاد عدد الكتب المطبوعة يوميا من 1000 كتاب إلى 1500 كتاب ، فأوجد قيمة تكلفة الزيادة والمعطاة بالتكامل $\int_{1000}^{1500} (10 - 0.002x)\ dx$

مهارات التفكير العليا: صـ388ـ

31)اكتشف الخطأ: سئل ماجد وخالد عن دقة تقريب المساحة تحت منحنى باستعمال أطراف المستطيلات ، فأجاب ماجد: إنه عند تقريب المساحة تحت منحنى باستعمال أطراف المستطيلات اليمنى ، فإن المساحة الناتجة تكون أكبر دائما من المساحة الحقيقية تحت المنحنى . في حين أجاب خالد : إن المساحة المحسوبة باستعمال أطراف المستطيلات اليسرى تكون أكبر دائما من المساحة الحقيقية تحت المنحنى أيهما كانت إجابته صحيحة ؟ برر إجابتك

الواجب:

## تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ما مساحة المنطقة المحصورة بين $y = -x^2 - 3x + 6$ والمحور $x$ في الفترة $[2, 6]$ ؟ | | | | |
| | A | 93.33 وحدة مربعة تقريبا | | B | 90 وحدة مربعة تقريبا |
| | C | 86.67 وحدة مربعة تقريبا | | D | 52 وحدة مربعة تقريبا |
| 2 | أي مما يأتي يمثل مشتقة $n(a) = \frac{4}{a} - \frac{5}{a^2} + \frac{3}{a^4} + 4a$؟ | | | | |
| | A | $\grave{n}(a) = 8a - 5a^2 + 3a^4$ | | B | $\grave{n}(a) = 4a^2 - 5a^3 + 3a^4 + 4$ |
| | C | $\grave{n}(a) = \frac{-4}{a^2} + \frac{5}{a^3} - \frac{3}{a^5} + 4$ | | D | $\grave{n}(a) = \frac{-4}{a^2} + \frac{10}{a^3} - \frac{12}{a^5} + 4$ |
| 3 | ما قيمة $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+3x-10}{x^2+5x+6}$؟ | | | | |
| | A | $\frac{1}{15}$ | | B | $\frac{3}{15}$ |
| | C | $\frac{2}{15}$ | | D | $\frac{4}{15}$ |
| 4 | عند إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2 - 2$ ومحور $x$ على الفترة $[-2,8]$ باستعمال 30 مستطيلا ، فإن عرض كل مستطيل يساوي.... | | | | |
| | A | $\frac{1}{2}$ | | B | $\frac{1}{3}$ |
| | C | $\frac{1}{5}$ | | D | 1 |
| 5 | عند تقريب المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2 - 4$ ومحور $x$ على الفترة $[1,10]$ باستعمال مستطيلات ، عرض كل منها 0.5 فإن عدد المستطيلات يساوي .... | | | | |
| | A | 20 | | B | 18 |
| | C | 16 | | D | 14 |
| 6 | ما مساحة التقريبة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ الممثلة بالشكل والمحور $x$؟  | | | | |
| | A | 6 | | B | 10 |
| | C | 12 | | D | 24 |

## 1 إيجاد الدوال الأصلية

الدالة الأصلية F(X) هي الدالة العكسية للمشتقة $f(x)$

هناك عدد لا نهائي من الدوال الأصلية لأي دالة, والشكل العام للدالة الأصلية هو الشكل الذي يحوي الثابت C

**تحقق من فهمك : صـ 389ـ** أوجد دالتين أصليتين مختلفتين لكل دالة مما يأتي:

(1A $2x$

(1B $-3x^{-4}$

**تدرب: صـ394ـ** أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

(1 $f(x)=x^5$

(2 $f(z)=\sqrt[3]{z}$

## 2 قواعد الدالة الأصلية

**قاعدة القوة**

إذا كان $f(x)=x^n$

حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 فإن:

$$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

**قاعدة ضرب القوة في عدد ثابت**

إذا كان $f(x)=kx^n$

حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 ،

k عددا ثابتا فإن:

$$F(x)=\frac{kx^{n+1}}{n+1}+C$$

**قاعدة المجموع والفرق**

إذا كان لـ g(x),f(x) دالتان أصليتان هما G(X),F(X)

على الترتيب فإن $F(x)\pm G(x)$

دالة أصلية لـ

$f(x)\pm g(x)$

**الدوال لأصلية**

$F(x)=kx$ هي دالة أصلية لـ $f(x)=k$ ، فمثلا ، إذا كان $f(x)=3$ فإن $F(x)=3x$

**تحقق من فهمك : صـ 390ـ** أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

(2A $f(x)=6x^4$

(2B $f(x)=\frac{10}{x^3}$

(2C $f(x)=8x^7+6x+2$

**تدرب: صـ394ـــ** أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

4) $w(u) = \frac{2}{3}u^5 + \frac{1}{6}u^3 - \frac{2}{5}u$

5) $u(d) = \frac{12}{d^5} + \frac{5}{d^3} - 6d^2 + 3.5$

## 3 التكامل غير المحدد

يعطى التكامل غير المحدد للدالة *f* بالصيغة $\int f(x)dx = F(x) + C$ حيث F(x) دالة أصلية لـ *f(x)* و c ثابت

**تحقق من فهمك : صـ 391ـــ**

3) عند قيام فني بإصلاح نافذة برج على ارتفاع 120ft سقطت محفظته نحو الأرض، وتمثل $v(t) = -32t$ سرعة المحفظة المتجهة اللحظية بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها.

A) أوجد دالة موقع المحفظة S(t) بعد t ثانية من سقوطها.

B) أوجد الزمن الذي تستغرقه المحفظة حتى تصل إلى سطح الأرض.

**تدرب: صـ394ـــ**

7) ارجع إلى فقرة لماذا ؟ في بداية الدرس. افترض أن القلم قد استغرق 2s حتى الوصول إلى سطح الأرض.

a ) أوجد دالة الموقع $s(t) = \int -32t\ dt$.

b) احسب قيمة C عندما $S(t) = 0\ ,\ t = 2s$

c) ما ارتفاع القلم عن سطح الأرض بعد 1.5s من سقوطه؟

## 4 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

### التكامل المحدد

إذا كانت F(x) دالة أصلية للدالة المتصلة $f(x)$ فإن $\int_a^b f(x)dx = F(b) + F(a)$

ويمكن التعبير عن الطرف الأيمن من هذه العبارة بالرمز $F(x)\Big|_a^b$

**تحقق من فهمك : صـ 392ـ** احسب كل تكامل محدد مما يأتي:

(4A $\int_2^5 3x^2\,dx$

(4B $\int_1^2 (16x^3 - 6x^2)\,dx$

**تدرب: صـ 394ـ** احسب كل تكامل محدد مما يأتي:

(9 $\int_1^4 2x^3\,dx$

(10 $\int_2^5 (a^2 - a + 6)\,da$

## 5 التكاملات المحددة وغير المحددة

**تنبيه** صحيح أنه يمكن تجاهل الثابت C عند حساب التكامل المحدد إلا أنه يجب أخذه بعين الاعتبار عند حساب التكامل غير المحدد، لأنه جزء من الدالة الأصلية

**تحقق من فهمك : صـ 393ـ** احسب كل تكامل مما يأتي:

(5A $\int (6x^2 + 8x - 3)\,dx$

(5B $\int_1^3(-x^4+8x^3-24x^2+30x-4)\,dx$

تدرب: صـ 394 احسب كل تكامل مما يأتي:

(8 $\int(6m+12m^3)\,dm$

(11 $\int_1^3(\frac{1}{2}h^2+\frac{2}{3}h^3-\frac{1}{5}h^4)\,dh$

## 6 من التطبيقات على التكامل المحدد

تحقق من فهمك : صـ 393 أوجد الشغل اللازم لشد نابض مسافة ما والمعطى بالتكامل في كل مما يأتي:

(6A $\int_0^{0.7}476x\,dx$

(6B $\int_0^{1.4}512x\,dx$

**تدرب: صـ 394ــ**

7) تعطى قفز حشرة بـ $v(t) = -32t + 34$ ، حيث t الزمن بالثواني ، و $v(t)$ السرعة المتجهة بالأقدام لكل ثانية

a) أوجد دالة الموقع S(t) للحشرة ثم احسب قيمة C بفرض أنه عندما t = 0 فإن S(t) = 0

b) أوجد الزمن من لحظة قفز الحشرة حتى هبوطها على سطح الأرض؟

**مهارات التفكير العليا: صـ 395ــ**

31) **تحد**: احسب قيمة $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ حيث r عدد ثابت

**تبرير**: حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائما ، أو صحيحة أحيانا ، أو غير صحيحة أبدا. برر إجابتك:

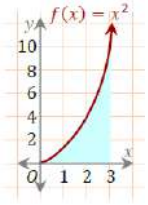
32) $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$

33) $\int_a^b f(x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx$

34) $\int_a^b f(x)dx = \int_{|b|}^{|a|} f(x)dx$

**الواجب:**

## تحصيلي رياضيات

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | إذا كان $\int_0^2 kx\,dx = 6$ ، فما قيمة k | | | | |
| | A | 1 | | B | 2 |
| | C | 3 | | D | 4 |
| 2 | إذا كان $\int_1^n 4x^3\,dx = 15$ فما قيمة $n$؟ | | | | |
| | A | $\frac{1}{4}$ | | B | 2 |
| | C | 4 | | D | 8 |
| 3 | إذا كان $\int_0^4 (x+k)\,dx = 20$ فما قيمة $k$؟ | | | | |
| | A | $-7$ | | B | $-3$ |
| | C | 3 | | D | 7 |
| 4 | ما المساحة المحصورة بين منحنى الدالة : $f(x) = x^2$ والمحور $x$ في الفترة $[0,3]$ ؟   | | | | |
| | A | 0 | | B | 1 |
| | C | 3 | | D | 9 |
| 5 | $\int 10x^{-3}\,dx$ يساوي ... | | | | |
| | A | $-5x^{-2} + c$ | | B | $-5x^{-4} + c$ |
| | C | $5x^{-2} + c$ | | D | $5x^{-4} + c$ |
| 6 | التكامل $\int_2^3 (4x+1)\,dx$ يساوي... | | | | |
| | A | 10 | | B | 11 |
| | C | 20 | | D | 21 |
| 7 | $\int (4x+5)\,dx$ يساوي ... | | | | |
| | A | $4x + 5 + C$ | | B | 4 |
| | C | $2x^2 + 5x + C$ | | D | $4x^2 + 5x + C$ |

انتهى الفصل الدراسي الثالث