

ملخص

مادة الرياضيات 2-3

نظام المسارات السنة الثالثة

الفصل الدراسي الثاني

3-1

المتطابقات المثلثية

الدرس

اختبر نفسك

3-2

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

الدرس

اختبر نفسك

3-3

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

الدرس

اختبر نفسك

3-4

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

الدرس

اختبر نفسك

3-5

حل المعادلات المثلثية

الدرس

اختبر نفسك

أسئلة تحصيلي

المتطابقة

هي معادلة يتساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها .

مثال:

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

لأن طرفيها متساويان لجميع قيم x

المتطابقة المثلثية

هي متطابقة تحوي دوالاً مثلثية .

مثال:

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$$

المتطابقات المثلثية الأساسية

المتطابقات النسبية

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$$

متطابقات المقلوب

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$$

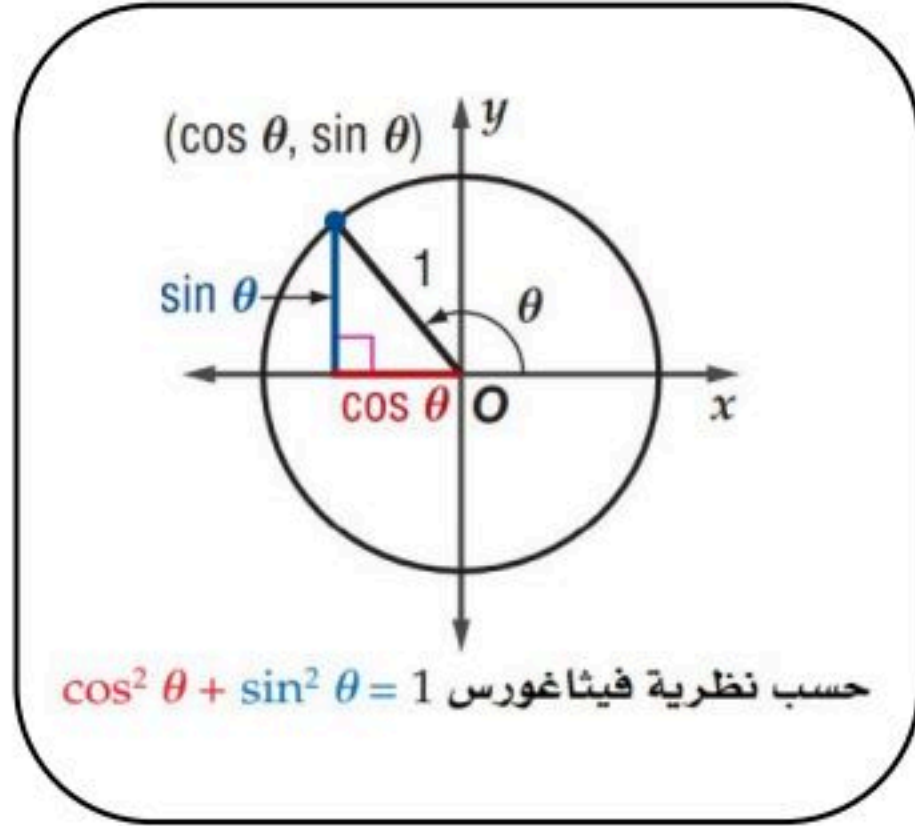
$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, \tan \theta \neq 0$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}, \csc \theta \neq 0$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}, \sec \theta \neq 0$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}, \cot \theta \neq 0$$

متطابقات فيثاغورس

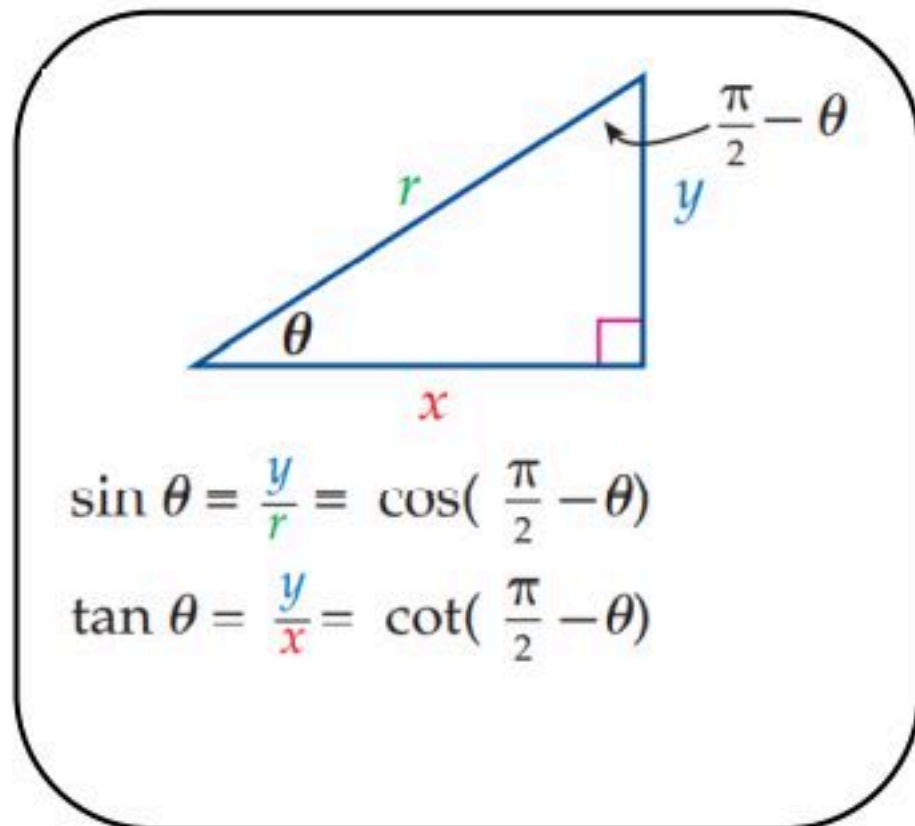


$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

متطابقات الزاويتين المتتامتين

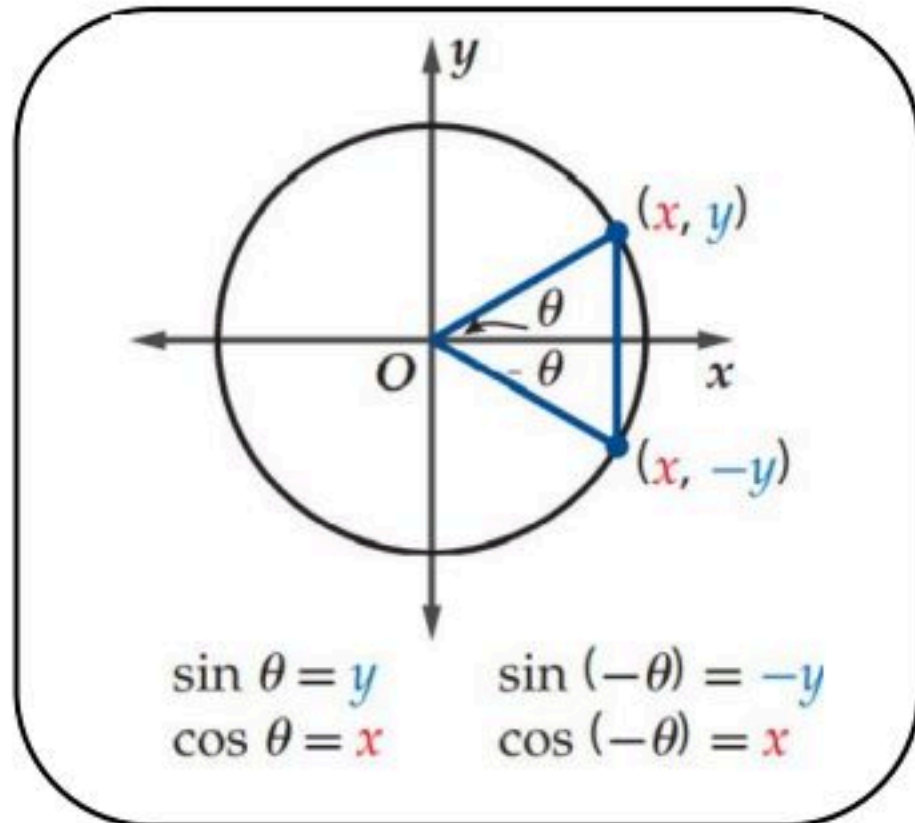


$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$$

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية

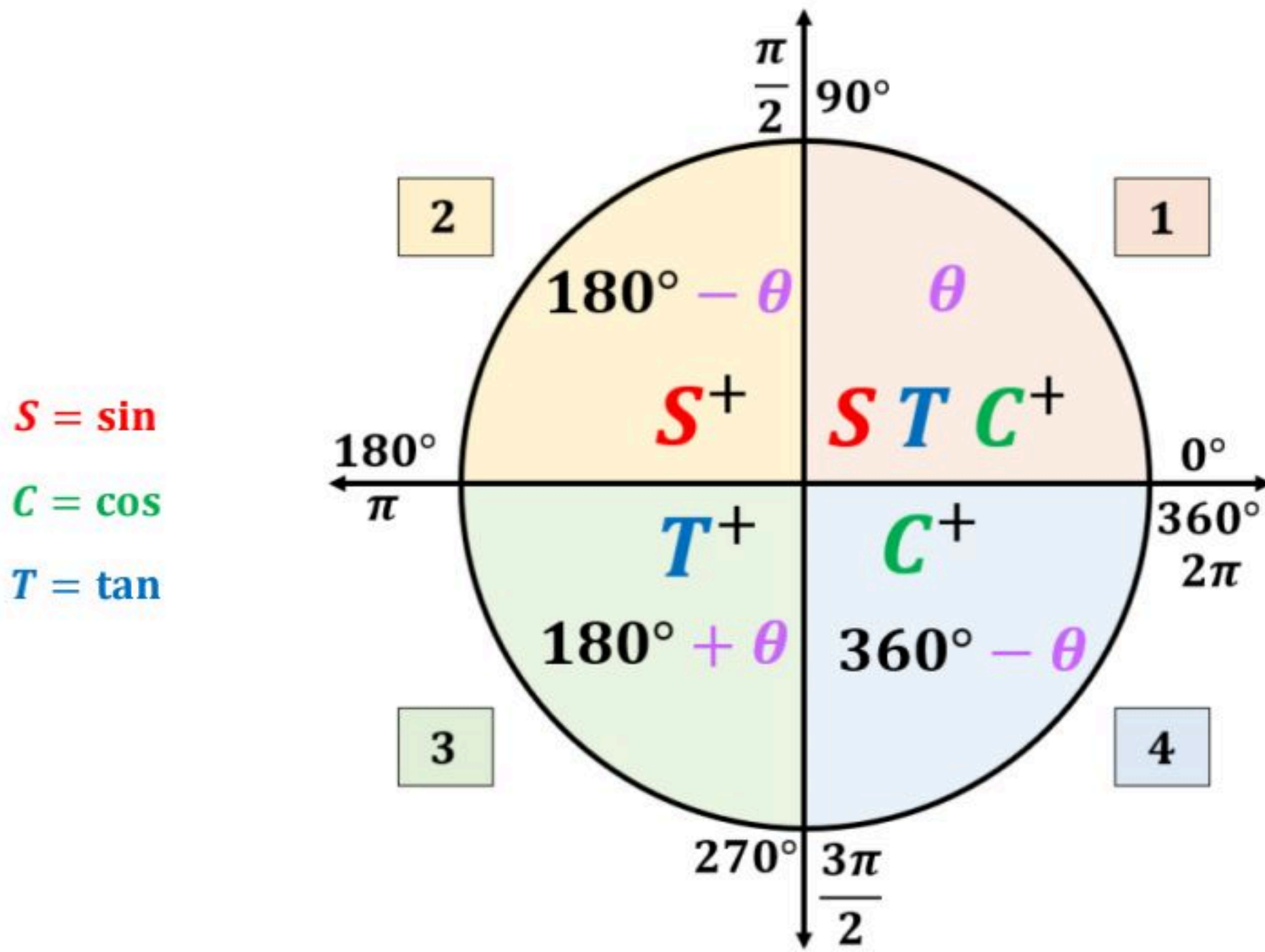


$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

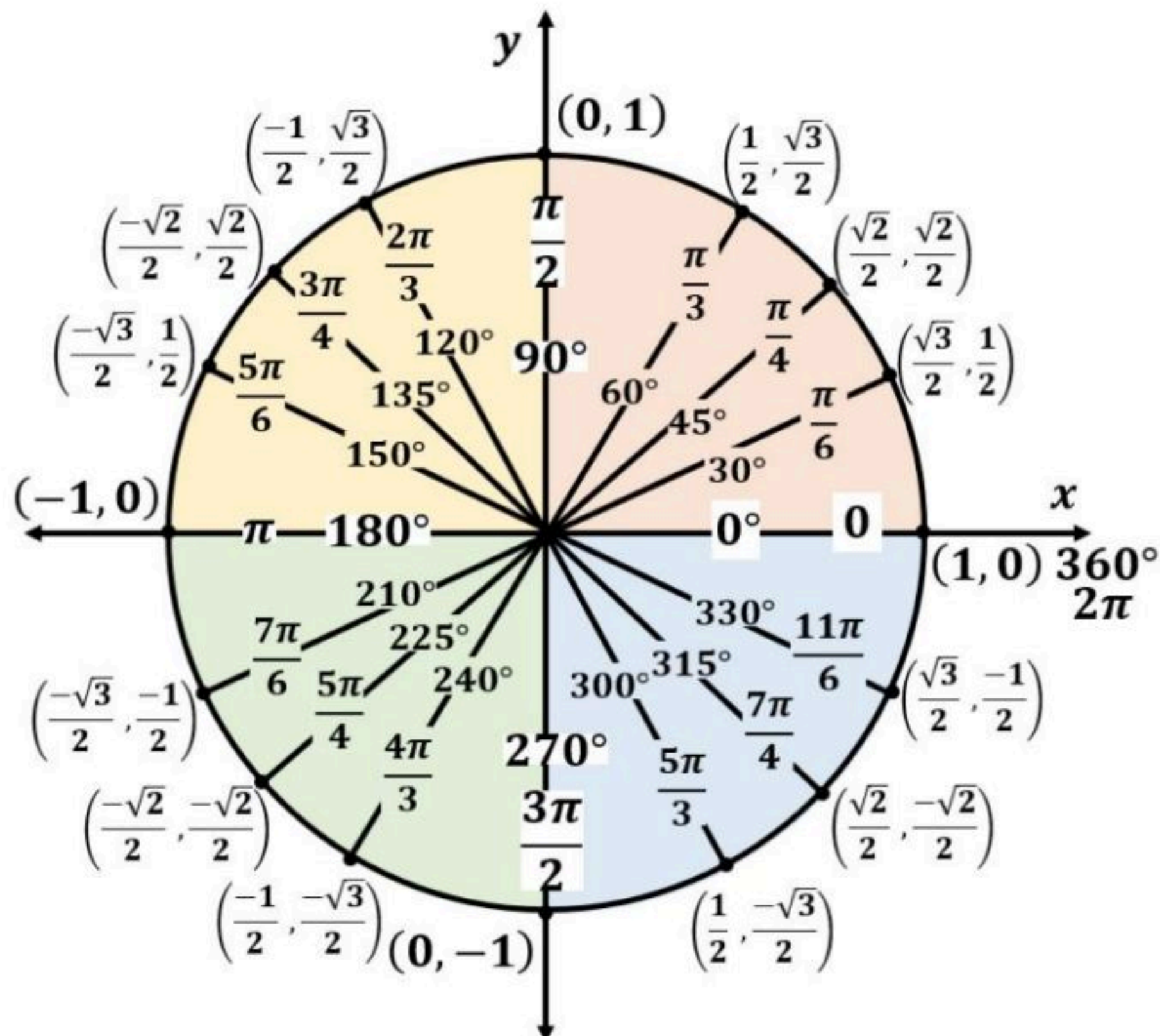
$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

دائرة الوحدة والإشارات والزوايا المرجعية



حساب الدوال المثلثية للزوايا من خلال دائرة الوحدة



حساب الدوال المثلثية للزوايا المشهورة بدون آلة حاسبة

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan = \frac{\sin}{\cos}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

	0°	90°
sin	0	1
cos	1	0
$\tan = \frac{\sin}{\cos}$	$\frac{0}{1} = 0$	$\frac{1}{0} =$ غير معرف

	180°	270°	360°
sin	0	-1	0
cos	-1	0	1
$\tan = \frac{\sin}{\cos}$	$\frac{0}{-1} = 0$	$\frac{-1}{0} =$ غير معرف	$\frac{0}{1} = 0$

استعمال المتطابقات المثلثية

يمكن استعمال المتطابقات الأساسية لإيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية .

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos \theta$ ، إذا كان $\sin \theta = \frac{4}{5}$

$$90^\circ < \theta < 180^\circ$$

مثال

الحل :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{16}{25}$$

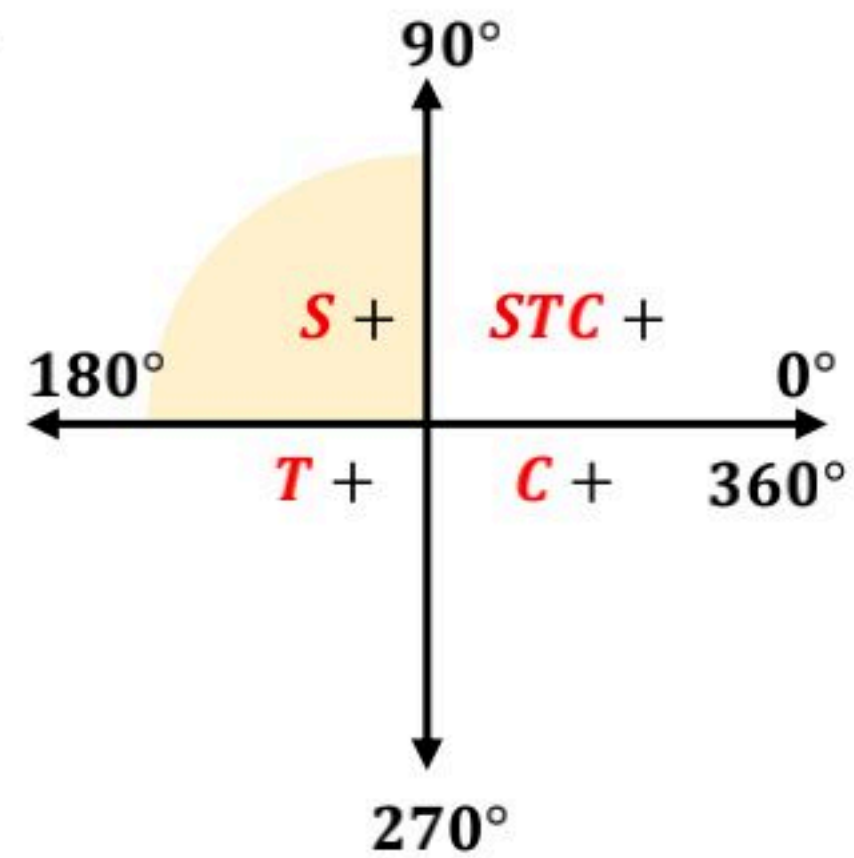
$$\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = -\frac{3}{5}$$

\cos سالبة

لأنها في الربع الثاني



تبسيط العبارات المثلثية

يعني إيجاد قيمة عددية للعبارة ، أو كتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة فقط إن أمكن .

$$\frac{\cos \theta \csc \theta}{\tan \theta} \quad \text{بسط العبارة :}$$

الحل :

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta \csc \theta}{\tan \theta} &= \frac{\cos \theta \cdot \frac{1}{\sin \theta}}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\ &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \end{aligned}$$

$$= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$= \cot^2 \theta$$

مثال

من الأسهل عادة أن تكتب حدود العبارة جميعها بدلالة $\cos \theta$ و $\sin \theta$

إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

بسط أحد طرفي **المتطابقة** حتى يصبح **الطرفان متساويين** ، وفي العادة يكون من **الأسهل** البدء بالطرف **الأكثر تعقيداً** .

مثال

أثبت صحة المتطابقة : $\cos^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^2 \theta = 1$

الحل :

نبدأ من الطرف الأيسر $\leftarrow \cos^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^2 \theta$

$$= \cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \cos^2 \theta$$

$$= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

ونصل إلى الطرف الأيمن $\leftarrow 1$

إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

في بعض الأحيان يكون من **الأسهل** أن تحول **كل طرف في المتطابقة** بصورة **منفصلة** إلى صورة **مشتركة** .

مثال

أثبت صحة المتطابقة : $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = \cot \theta \tan \theta$

الحل :

$$\begin{aligned} \csc^2 \theta - \cot^2 \theta &= \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\cot \theta \tan \theta$

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= 1 \end{aligned}$$

بعد فك كل طرف
بشكل منفصل نصل
إلى نفس النتيجة .

اقتراحات
لإثبات صحة
المتطابقات

- **بسط** العبارة بالإفادة من **المتطابقات المثلثية** الأساسية.
- **حلل** أو **اضرب** كلا من **البسط والمقام** بالعبارة المثلثية نفسها .
- **اكتب** كل طرف بدلالة كل من **الجيب وجيب التمام فقط** ثم بسط كل طرف قدر المستطاع.
- **لا تنفذ** أي عملية (جمع ، طرح ، ضرب ، قسمة) على **طرفي المعادلة** التي يطلب إثبات أنها **متطابقة** ، لأن **خصائص المساواة لا تنطبق** على **المتطابقات** كما تنطبق على المعادلات.

متطابقات المجموع

1 $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 75^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

2 $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 105^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

3 $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan 105^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned}\tan 105^\circ &= \tan(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - (\sqrt{3})(1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 3 + 1 + \sqrt{3}}{1 - 3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} \\ &= -2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

متطابقات الفرق

1 $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 15^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin(60^\circ - 45^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

2 $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 15^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

3 $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan 120^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned} \tan 120^\circ &= \tan(180^\circ - 60^\circ) \\ &= \frac{\tan 180^\circ - \tan 60^\circ}{1 + \tan 180^\circ \tan 60^\circ} \\ &= \frac{0 - \sqrt{3}}{1 + (0)(\sqrt{3})} \\ &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

قائمة بقياسات بعض الزوايا الناتجة عن جمع أو طرح زاويتين

$(A + B)$	A	B
75°	45°	30°
105°	60°	45°
120°	90°	30°
135°	90°	45°

$(A - B)$	A	B
15°	60°	45°
15°	45°	30°
120°	180°	60°
150°	180°	30°

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما أيضاً في إثبات صحة المتطابقات.

أثبت صحة المتطابقة الآتية :

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

الحل :

الطرف الأيسر

$$\begin{aligned} &\sin(90^\circ - \theta) \\ &= \sin 90^\circ \cos \theta - \cos 90^\circ \sin \theta \\ &= 1 \cos \theta - 0 \sin \theta \\ &= \cos \theta \end{aligned}$$

الطرف الأيمن

مثال

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

$\sin 2\theta$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{-1}{3}$
 $90^\circ < \theta < 180^\circ$

مثال

الحل :

θ تقع في الربع الثاني

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ثانياً: نوجد $\sin 2\theta$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 2 \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \left(\frac{-1}{3} \right)$$

$$= \frac{-4\sqrt{2}}{9}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

أولاً: نوجد $\sin \theta$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{-1}{3} \right)^2$$

$$\sin^2 \theta = \frac{8}{9}$$

$$\sin \theta = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\tan 2\theta$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan 2\theta$ ، إذا كان $\tan \theta = -3$
 $90^\circ < \theta < 180^\circ$

مثال

الحل :

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$= \frac{2(-3)}{1 - (-3)^2}$$

$$= \frac{-6}{-8}$$

$$= \frac{3}{4}$$

$\cos 2\theta$

1

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ ، إذا كان $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ، $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ $0^\circ < \theta < 90^\circ$

الحل :

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$$

2

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{-1}{3}$ $90^\circ < \theta < 180^\circ$

الحل :

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$= 2 \left(\frac{-1}{3}\right)^2 - 1$$

$$= 2 \left(\frac{1}{9}\right) - 1 = \frac{-7}{9}$$

3

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ ، إذا كان $\sin \theta = \frac{4}{5}$ $90^\circ < \theta < 180^\circ$

الحل :

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$= 1 - 2 \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= 1 - 2 \left(\frac{16}{25}\right) = \frac{-7}{25}$$

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{5}$
 $270^\circ < \theta < 360^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}} \end{aligned}$$

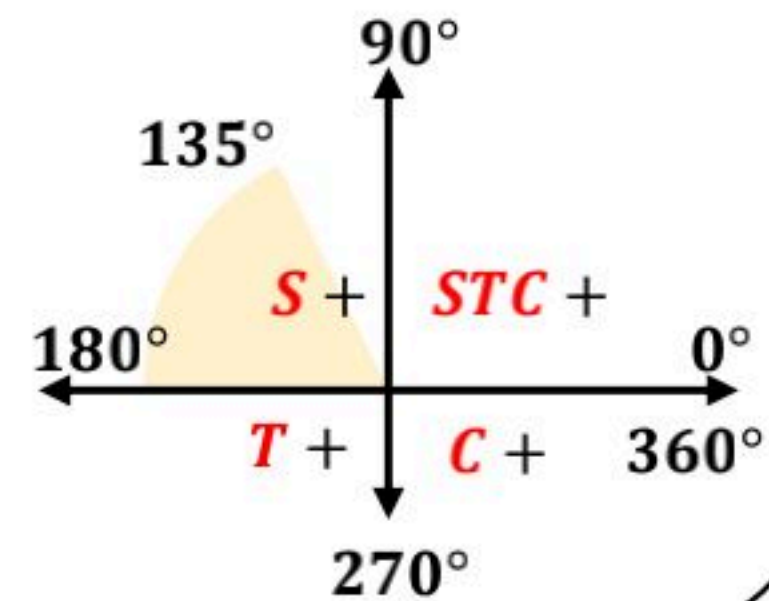
$$\begin{aligned} &= \pm \sqrt{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

إنطاق المقام :

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$135^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ$$

$\frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني
 $\sin \frac{\theta}{2}$ موجبة



$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{5}$
 $270^\circ < \theta < 360^\circ$

الحل :

$$\begin{aligned} \cos \frac{\theta}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}} \end{aligned}$$

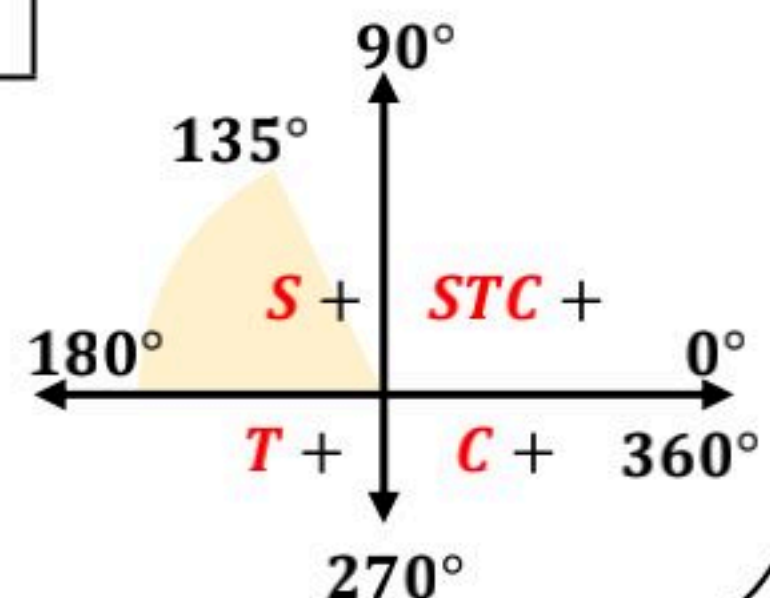
$$\begin{aligned} &= \pm \sqrt{\frac{8}{5} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

إنطاق المقام :

$$= -\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$135^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ$$

$\frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني
 $\cos \frac{\theta}{2}$ سالبة



$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

مثال

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{5}$ $270^\circ < \theta < 360^\circ$

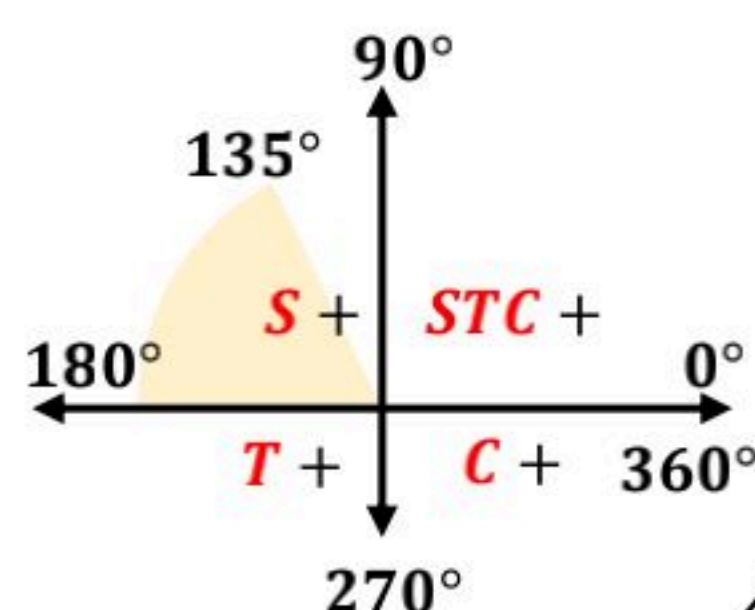
الحل :

$$\begin{aligned} \tan \frac{\theta}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{1 + \frac{3}{5}}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{5}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \pm \sqrt{\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$135^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ$$

$\frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني
 $\tan \frac{\theta}{2}$ سالبة



إثبات صحة المتطابقات

نستطيع استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما وكذلك المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها في إثبات صحة المتطابقات .

أثبت صحة المتطابقة :

$$\tan \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

الحل :

الطرف الأيمن

$$\begin{aligned} &\frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} \\ &= \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 \theta)}{2 \sin \theta \cos \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - 1 + 2 \sin^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{2 \sin^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \end{aligned}$$

$$= \tan \theta$$

الطرف الأيسر

مثال

المعادلات المثلثية

هي معادلات تتضمن دوالاً مثلثية وتكون صحيحة عند قيم محددة للمتغير.

حل المعادلات على فترة معطاة

حل المعادلة :

$$\cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 ; 0^\circ \leq \theta \leq 240^\circ$$

مثال

الحل :

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

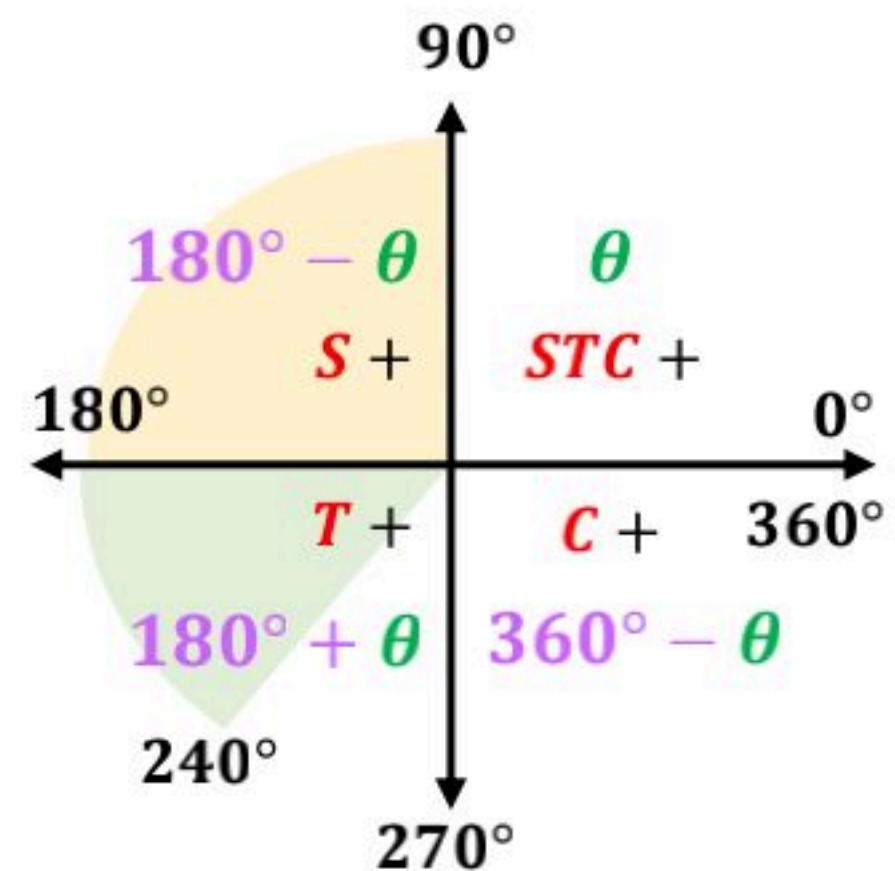
cos سالبة

$$\theta = 30^\circ$$

نوجد الزوايا
في الفترة من خلال
الزوايا المرجعية

الزوايا θ تقع في
الربع الثاني والربع الثالث

نعوض بالزوايا المرجعية
في الفترات المحددة



إذن :

حل المعادلة :

$$150^\circ, 210^\circ$$

الربع الثالث

$$180^\circ + \theta$$

$$180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$$

الربع الثاني

$$180^\circ - \theta$$

$$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

المعادلات المثلثية بدون فترة محددة

تحل **المعادلات المثلثية** عادة ، لقيم المتغير في الفترة $[0, 2\pi]$ بالراديان أو $[0^\circ, 360^\circ]$ بالدرجات . كما توجد **حلول** أخرى تقع **خارج** الفترات المحددة لذلك فالحلول **تختلف** باختلاف الفترات .

معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

حل المعادلة $2 \sin \theta = -1$ لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان .

مثال

الحل :

$$\frac{2 \sin \theta}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = 30^\circ$$

نوجد الزوايا في الفترة من خلال الزوايا المرجعية

ولأنها بدون فترة فلها عدد لا نهائي من الحلول وتكتب بالقاعدة :

$$\frac{7\pi}{6} + 2\pi k$$

$$\frac{11\pi}{6} + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

sin سالبة

إذن الزاوية θ تقع في الربع الثالث و الربع الرابع نعوض بالزوايا المرجعية في الفترات المحددة

الربع الرابع

$$360^\circ - \theta$$

$$360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$$

نحولها لـ الراديان

$$330^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{11\pi}{6}$$

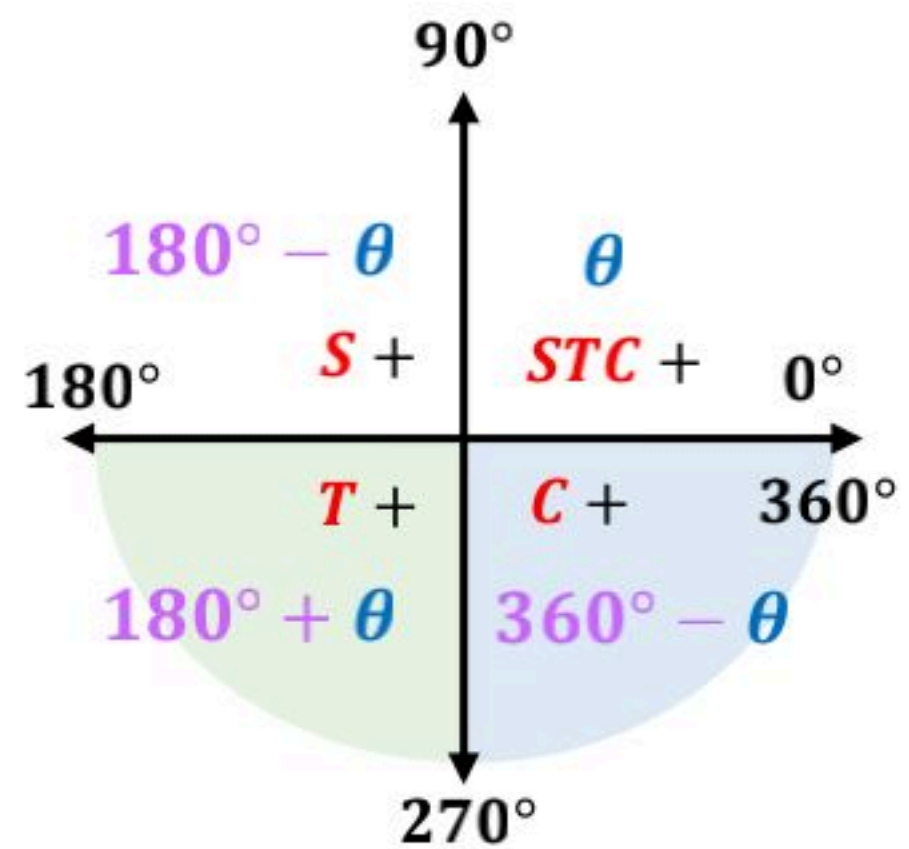
الربع الثالث

$$180^\circ + \theta$$

$$180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$$

نحولها لـ الراديان

$$210^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{7\pi}{6}$$



الحلول الدخيلة

بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل مثل المعادلة: $\cos \theta = 4$ ليس لها حل ، لأن قيم $\cos \theta$ جميعها تقع في الفترة $[-1, 1]$.

كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولاً لا تحقق المعادلة الأصلية ، وتسمى مثل هذه الحلول حلولاً دخيلة .

حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

حل المعادلة: $\cos^2 \theta + 3 = 4 - \sin^2 \theta$

الحل :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 4 - 3$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

متطابقة

لها عدد لا نهائي من الحلول

لأن جميع قيم θ تمثل حلولاً لها.

مثال

حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

حل المعادلة لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات

$$\sin \theta \cot \theta - \cos^2 \theta = 0$$

الحل :

$$\sin \theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \cos^2 \theta = 0$$

$$\cos \theta - \cos^2 \theta = 0$$

$$\cos \theta (1 - \cos \theta) = 0$$

$$1 - \cos \theta = 0 \quad \text{أو} \quad \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta = 0$$

$$\theta = 90^\circ, 270^\circ \quad \text{إذن}$$

$$1 - \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta = 1$$

$$\theta = 0^\circ, 360^\circ \quad \text{إذن}$$

وكلاهما حلان

دخيلان ، لأن $\cot \theta$

عندها غير معرفة .

حل المعادلة :

$$90^\circ + 180^\circ k$$

مثال

4-1

القطوع المكافئة

الدرس

اختبر نفسك

4-2

القطوع الناقصة والدوائر

الدرس

اختبر نفسك

4-3

القطوع الزائدة

الدرس

اختبر نفسك

4-4

تحديد أنواع القطوع المخروطية

الدرس

اختبر نفسك

أسئلة تحصيلي

القطوع المخروطية

هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس
كليهما أو أحدهما بحيث لا يمر المستوى بالرأس .



القطع الزائد



القطع المكافئ



القطع الناقص



الدائرة

الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

حيث A, B, C أعداد ليست جميعها أصفاراً.

وتوجد صورة أكثر تحديداً لمعادلة كل قطع مخروطي .

تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانياً

المحل الهندسي هو الشكل الذي ينتج عن مجموعة النقاط التي تحقق خاصية هندسية معينة .

القطع المكافئ هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوى التي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة (البؤرة) مساوياً دائماً لبعدها عن مستقيم معلوم يسمى الدليل .

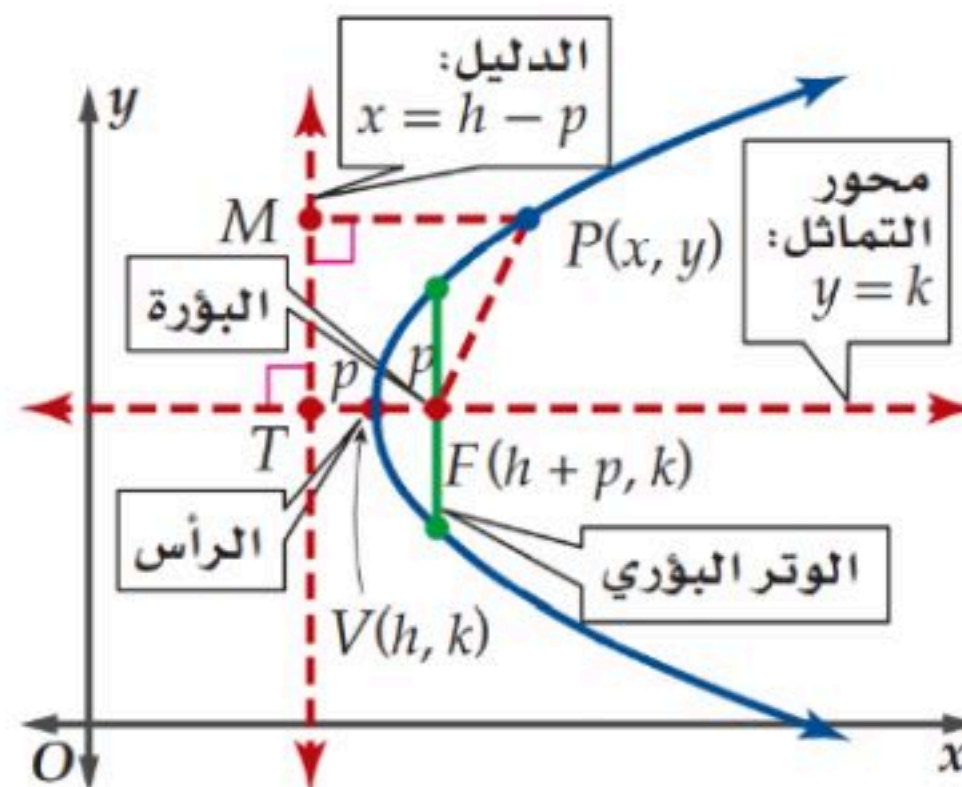
البؤرة هي نقطة ثابتة تقع على محور التماثل للقطع ، وتبعد عن الرأس مسافة $|c|$ وتكون مساوية لبعدها عن مستقيم ثابت يسمى الدليل .

الدليل هو مستقيم عمودي على محور التماثل بحيث يكون بعده عن أي نقطة تقع على القطع مساوياً لبعدها عن النقطة عن البؤرة .

محور التماثل هو المستقيم العمودي على الدليل والمار بالبؤرة .

الرأس هو نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور التماثل .

الوتر البؤري هو القطعة المستقيمة المار بالبؤرة والعمودية على محور التماثل ويقع طرفا الوتر البؤري على القطع المكافئ ويساوي $|4c|$ حيث c المسافة بين البؤرة والرأس .





خصائص القطوع المكافئة

$(y - k)^2 = 4c(x - h)$	المعادلة	$(x - h)^2 = 4c(y - k)$
<p>$c < 0$ $c > 0$</p>	التمثيل البياني	<p>$c < 0$ $c > 0$</p>
أفقي	الاتجاه	رأسي
(h, k)	الرأس	(h, k)
$(h + c, k)$	البؤرة	$(h, k + c)$
$x = h - c$	معادلة الدليل	$y = k - c$
$y = k$	معادلة محور التماثل	$x = h$
$ 4c $	طول الوتر البؤري	$ 4c $

طريقة مختصرة لتحديد خصائص القطوع المكافئة

$$(x - h)^2 = 4c(y - k)$$

معادلة محور التماثل :

 $x = h$

الاتجاه : رأسي .. أعلى (حسب الإشارة)

(+) أعلى ، (-) أسفل

البؤرة : $(h, k + c)$

معادلة الدليل : $y = k - c$

طول الوتر البؤري : $|4c|$

الرأس : (h, k)

حدد خصائص القطع المكافئ:

$$(x + 1)^2 = -12(y - 6)$$

الحل :

مثال

$$h = -1$$

$$c = \frac{-12}{4} = -3 \quad k = 6$$

معادلة محور التماثل :

$$x = -1$$

الاتجاه : رأسي .. أسفل

البؤرة : $(-1, 6 + (-3))$

$(-1, 3)$

معادلة الدليل : $y = 6 - (-3)$

$$y = 9$$

الرأس : $(-1, 6)$

طول الوتر البؤري : $|-12| = 12$

طريقة مختصرة لتحديد خصائص القطوع المكافئة

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

معادلة محور التماثل :

 $y = k$

الاتجاه : أفقي .. يمين (حسب الإشارة)

(+) يمين ، (-) يسار

البؤرة : $(h + c, k)$

معادلة الدليل : $x = h - c$

الرأس : (h, k)

طول الوتر البؤري : $|4c|$

حدد خصائص القطع المكافئ:

$$(y - 4)^2 = 20(x + 2)$$

مثال

الحل :

$$k = 4$$

$$c = \frac{20}{4} = 5$$

$$h = -2$$

معادلة محور التماثل :

$$y = 4$$

الاتجاه : أفقي .. يمين

البؤرة : $(-2 + 5, 4)$

$(3, 4)$

معادلة الدليل : $x = -2 - 5$

$$x = -7$$

الرأس : $(-2, 4)$

طول الوتر البؤري : $|20| = 20$

كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

اكتب المعادلة على الصورة القياسية للقطع المكافئ:

$$x^2 - 4y + 3 = 7$$

الحل :

$$x^2 = 7 + 4y - 3$$

$$x^2 = 4y + 4$$

$$x^2 = 4(y + 1)$$

مثال

كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

معطى البؤرة والرأس

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص:

البؤرة $(-6, 2)$ والرأس $(-6, -1)$

الحل :

$$(x - h)^2 = 4c (y - k)$$

$$(x + 6)^2 = 12 (y + 1)$$

البؤرة $(-6, 2)$

الاختلاف بين الرأس والبؤرة في y

إذن المنحنى مفتوح رأسياً

نوجد c

الرأس $(-6, -1)$

$$k + c = 2$$

$$(h, k) \quad -1 + c = 2 \rightarrow c = 3 \rightarrow 4c = 12$$

مثال

معطى الرأس والدليل

مثال

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص:

الرأس $(9, -2)$ والدليل $x = 12$

الحل:

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

$$(y + 2)^2 = -12(x - 9)$$

الدليل $x = 12$

الدليل رأسي

إذن المنحنى مفتوح أفقياً

نوجد c

$$x = 12$$

$$h - c = 12$$

$$9 - c = 12 \rightarrow c = 9 - 12 = -3$$

الرأس $(9, -2)$

(h, k)

معطى البؤرة واتجاه المنحنى ويمر بنقطة

مثال

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص:

البؤرة $(-3, -4)$ والمنحنى مفتوح إلى أسفل ، ويمر بالنقطة $(5, -10)$

الحل:

$$(x - h)^2 = 4c(y - k)$$

$$(x + 3)^2 = -8(y + 2)$$

لايجاد c من الصورة القياسية للقطع:

$$(x - h)^2 = 4c(y - k)$$

نعوض عن

$$x = 5, y = -10, h = -3, k = -4 - c$$

$$(5 + 3)^2 = 4c(-10 - (-4 - c))$$

$$64 = 4c(-6 + c)$$

$$64 = -24c + 4c^2$$

$$4c^2 - 24c - 64 = 0$$

$$c^2 - 6c - 16 = 0$$

$$(c - 8)(c + 2) = 0 \rightarrow c = 8, c = -2$$

المنحنى مفتوح إلى أسفل

إذن الاتجاه رأسي ، وعليه

التغير في y

البؤرة $(-3, -4)$

$$k + c = -4$$

الرأس $(-3, -4 - c)$

(h, k)

ولأن المنحنى مفتوح

للأسفل إذن:

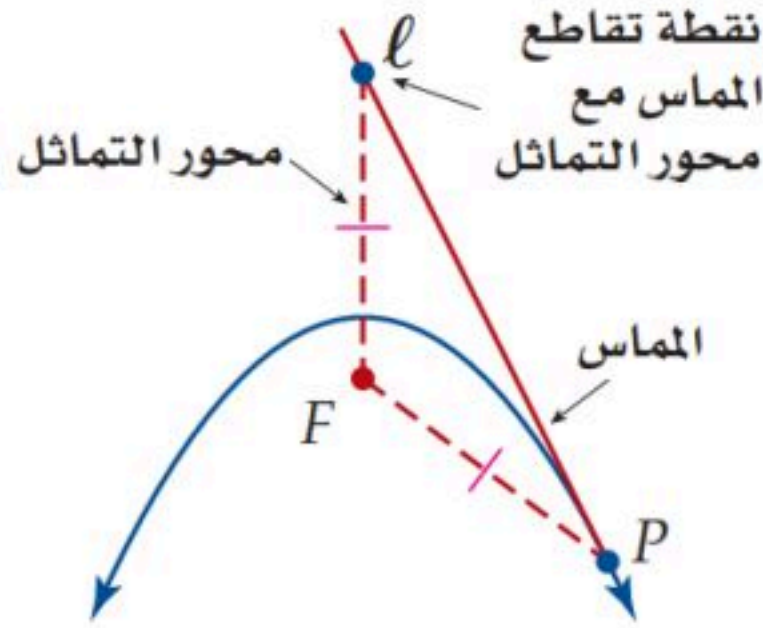
$$c = -2$$

$$4c = -8$$

$$k = -4 + 2$$

$$k = -2$$

مماس منحني القطع المكافئ



مماس القطع المكافئ عند النقطة P المغايرة لرأسه هو مستقيم

يحتوي أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون :

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين .
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني .

كتابة معادلة مماس منحني القطع المكافئ

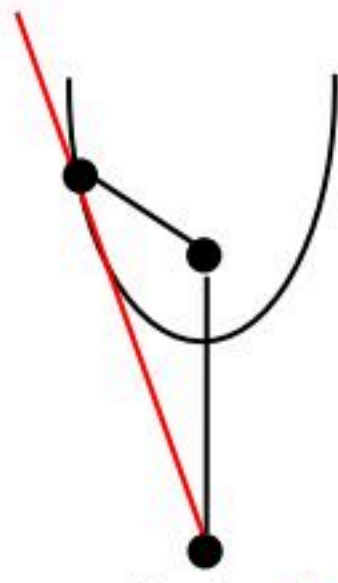
معادلة مماس منحني القطع المكافئ عند الرأس

- إذا كان المنحني مفتوحاً أفقياً ، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $x = h$
- إذا كان المنحني مفتوحاً رأسياً ، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $y = k$

اكتب معادلة مماس منحني القطع المكافئ $y = 4x^2 + 4$

عند النقطة $(-1, 8)$

الحل :



رابعاً: نوجد الميل ونعوض

في معادلة المستقيم

$$m = \frac{8 - 0}{-1 - 0} = -8$$

معادلة المستقيم المار بـ $(0, 0)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -8(x - 0)$$

$$y = -8x$$

ثانياً: نوجد d المسافة بين البؤرة والنقطة المعطاة

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-1 - 0)^2 + (8 - 4.06)^2}$$

$$d = 4.06$$

ثالثاً: نوجد إحداثيات النقطة

وذلك بطرح المسافة من أحد

احداثي البؤرة ولأن القطع رأسياً

نطرح من y فتصبح

$$(0, 0)$$

أولاً: نوجد إحداثيات البؤرة

المنحني مفتوح رأسياً

الصورة القياسية

$$x^2 = \frac{1}{4}(y - 4)$$

$$4c = \frac{1}{4}$$

$$c = \frac{1}{16} = 0.0625$$

الرأس $(0, 4)$

البؤرة $(0, 4.06)$

تحليل القطع الناقص وتمثيله بيانياً

القطع الناقص هو **المحل الهندسي** لمجموعة نقاط المستوى التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي مقداراً ثابتاً وهو $2a$ حيث a هي البعد بين الرأس والمركز.

البؤرتان هما نقطتان تقعان على المحور الأكبر والمسافة بينهما $2c$ وهو طول البعد البؤري ويكون مجموع بعديهما عن أي نقطة على منحنى القطع الناقص يساوي مقداراً ثابتاً ، حيث c هي البعد بين إحدى البؤرتين والمركز .

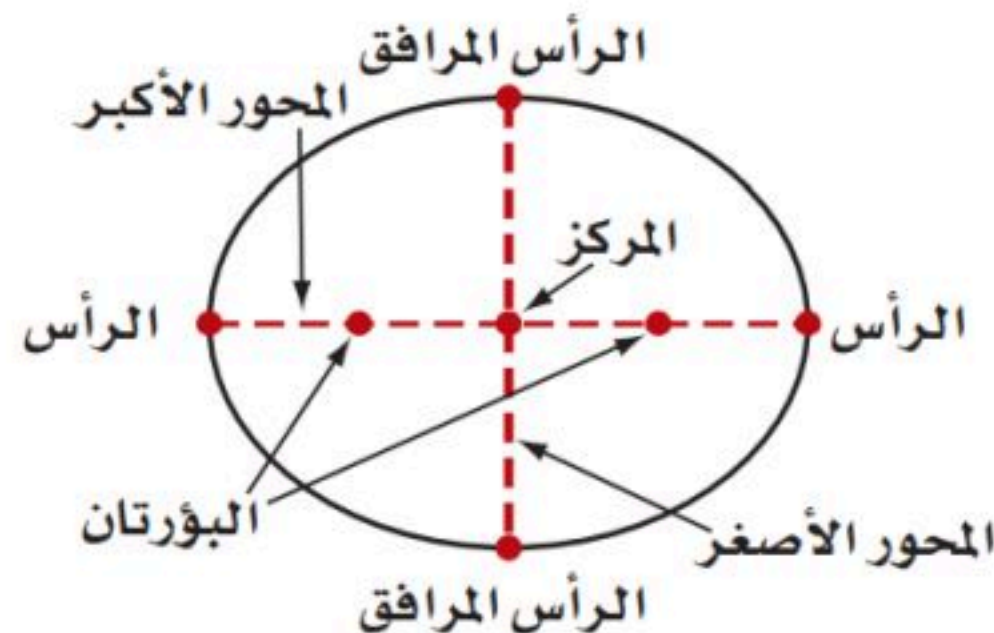
المحور الأكبر هو محور تماثل للقطع الناقص وهو القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين وتقع نهايتها على منحنى القطع الناقص ، وطوله $2a$ حيث a البعد بين المركز وأحد الرأسين .

المحور الأصغر هو القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز والمتعامدة مع المحور الأكبر ، وتقع نهايتها على منحنى القطع الناقص ، وطوله $2b$ ، حيث b هي البعد بين المركز وأحد الرأسين المرافقين .

المركز هو نقطة المنتصف للمحورين الأكبر والأصغر والبؤرتين .

الرأسان هما نقطتا نهايتي المحور الأكبر .

الرأسان المرافقان هما نقطتا نهايتي المحور الأصغر .





خصائص القطع الناقص

القطع الناقص		نوع القطع
		التمثيل البياني
$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	المعادلة
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$		إيجاد c "البعد بين المركز والبقرة"
هو العدد الأكبر		a^2
حسب اللي فوق العدد الأكبر a^2		تحديد الاتجاه
أفقي " x " فوق الـ a^2	رأسي " y " فوق الـ a^2	
طول المحور الأكبر		$2a$
طول المحور الأصغر		$2b$
طول البعد البؤري		$2c$
(h, k)		المركز
الأكبر $x = h$	الأكبر $y = k$	معادلة المحور
الأصغر $y = k$	الأصغر $x = h$	
$(h, k \pm a)$	$(h \pm a, k)$	الرأسان " a "
$(h, k \pm c)$	$(h \pm c, k)$	البؤرتان " c "
$(h \pm b, k)$	$(h, k \pm b)$	الرأسان المرافقان " b "
.....		خطا التقارب

تحديد خصائص القطع الناقص

الاتجاه : رأسي

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$$

الحل :

مثال

$$h = -2, k = 0, a = 7, b = 3, c = \sqrt{49 - 9} = \sqrt{40}$$

معادلة المحور الأصغر $y = 0$ المركز $x = -2$ معادلة المحور الأكبر

$(-2, 0)$

الرأسان المرافقان

$$b = 3$$

$$(1, 0)$$

$$(-5, 0)$$

طول المحور الأصغر

$$2b = 6$$

البؤرتان

$$c = \sqrt{40}$$

$$(-2, \sqrt{40})$$

$$(-2, -\sqrt{40})$$

طول البعد البؤري

$$2c = 2\sqrt{40}$$

الرأسان

$$a = 7$$

$$(-2, 7)$$

$$(-2, -7)$$

طول المحور الأكبر

$$2a = 14$$

تحديد خصائص القطع الناقص

الاتجاه : أفقي

$$\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

الحل :

مثال

$$h = -4, k = -3, a = 3, b = 2, c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

معادلة المحور الأصغر $x = -4$ المركز $y = -3$ معادلة المحور الأكبر

$(-4, -3)$

الرأسان

$$a = 3$$

$$(-1, -3)$$

$$(-7, -3)$$

طول المحور الأكبر

$$2a = 6$$

البؤرتان

$$c = \sqrt{5}$$

$$(-4 + \sqrt{5}, -3)$$

$$(-4 - \sqrt{5}, -3)$$

طول البعد البؤري

$$2c = 2\sqrt{5}$$

الرأسان المرافقان

$$b = 2$$

$$(-4, -1)$$

$$(-4, -5)$$

طول المحور الأصغر

$$2b = 4$$

كتابة معادلة القطع الناقص بمعلومية بعض خصائصه

معطى الرأسان والرأسان المرافقان

مثال

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(-6, 2)$ ، $(-6, -8)$ ، والرأسان المرافقان $(-9, -3)$ ، $(-3, -3)$

الحل:

مركز القطع هو منتصف المحور الأكبر

$$(h, k) = \left(\frac{-6 - 6}{2}, \frac{2 + (-8)}{2} \right) = (-6, -3)$$

وبما أن الإحداثيين x في المحور الأكبر

متساويان فهو رأسي المعادلة هي:

$$\frac{(y + 3)^2}{25} + \frac{(x + 6)^2}{9} = 1$$

نستعمل المحور الأكبر لتحديد a من الرأسين

$$2a = \sqrt{(-6 + 6)^2 + (2 + 8)^2} = 10$$

$$a = 5 \rightarrow a^2 = 25$$

نستعمل المحور الأصغر لتحديد b من الرأسين

المرافقين

$$2b = \sqrt{(-3 + 9)^2 + (-3 + 3)^2} = 6$$

$$b = 3 \rightarrow b^2 = 9$$

معطى الرأسان والبؤرتان

مثال

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(6, 4)$ ، $(-4, 4)$ ، والبؤرتان $(4, 4)$ ، $(-2, 4)$

الحل:

مركز القطع هو منتصف المحور الأكبر

$$(h, k) = \left(\frac{-4 + 6}{2}, \frac{4 + 4}{2} \right) = (1, 4)$$

وبما أن الإحداثيين y في المحور الأكبر

متساويان فهو أفقي المعادلة هي:

$$\frac{(x - 1)^2}{25} + \frac{(y - 4)^2}{16} = 1$$

طول المحور الأكبر لتحديد a من الرأسين

$$2a = \sqrt{(-4 - 6)^2 + (4 - 4)^2} = 10$$

$$a = 5 \rightarrow a^2 = 25$$

المسافة بين البؤرتين هي $2c$

$$2c = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (4 - 4)^2} = 6$$

$$c = 3$$

نوجد b^2

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$3^2 = 5^2 - b^2$$

$$b^2 = 25 - 9$$

$$b^2 = 16$$

معطى البؤرتان وطول المحور الأكبر

مثال

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص:
البؤرتان $(-7, 3)$, $(19, 3)$ ، وطول المحور الأكبر 30 وحدة

الحل :

مركز القطع هو نقطة منتصف البؤرتين

$$(h, k) = \left(\frac{19 - 7}{2}, \frac{3 + 3}{2} \right) = (6, 3)$$

وبما أن الإحداثيين y في المحور الأكبر متساويان فهو أفقي المعادلة هي :

$$\frac{(x - 6)^2}{225} + \frac{(y - 3)^2}{56} = 1$$

المسافة بين البؤرتين هي $2c$

$$2c = \sqrt{(19 + 7)^2 + (3 - 3)^2} = 26$$

$$c = 13$$

طول المحور الأكبر $2a = 30$

$$a = 15 \rightarrow a^2 = 225$$

نوجد b^2

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$13^2 = 15^2 - b^2$$

$$b^2 = 225 - 169$$

$$b^2 = 56$$

معطى البؤرتان وطول المحور الأصغر

مثال

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص:
الرأسان $(-2, 8)$, $(-2, -4)$ ، وطول المحور الأصغر 10 وحدة

الحل :

مركز القطع هو منتصف المحور الأكبر

$$(h, k) = \left(\frac{-2 - 2}{2}, \frac{-4 + 8}{2} \right) = (-2, 2)$$

وبما أن الإحداثيين x في المحور الأكبر متساويان فهو رأسي المعادلة هي :

$$\frac{(x + 2)^2}{25} + \frac{(y - 2)^2}{36} = 1$$

نستعمل المحور الأكبر لتحديد a من الرأسين

$$2a = \sqrt{(-2 + 2)^2 + (-4 - 8)^2} = 12$$

$$a = 6$$

$$a^2 = 36$$

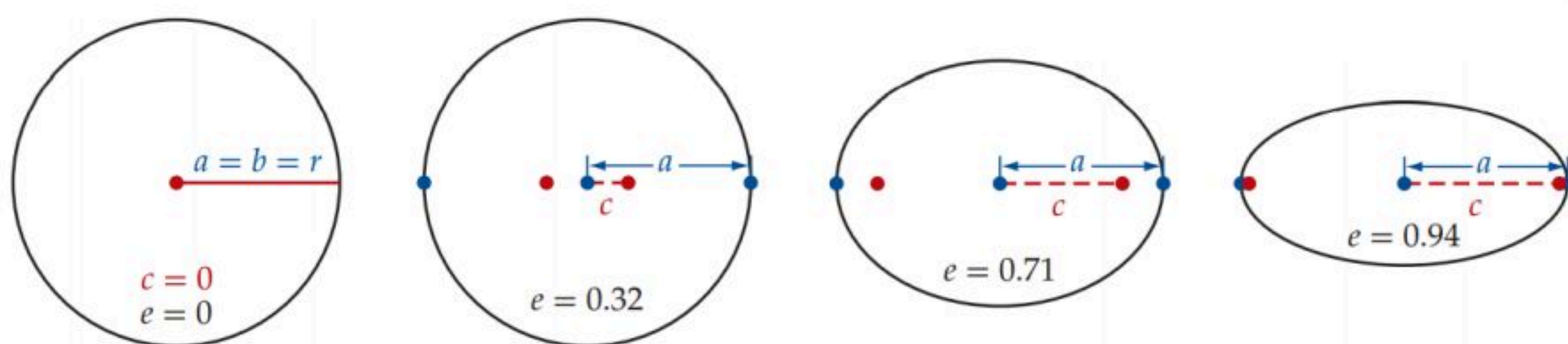
طول المحور الأصغر $2b = 10$

$$b = 5$$

$$b^2 = 25$$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص

هو نسبة c إلى a وتقع هذه القيمة دائماً بين 0 و 1 ، وتحدد مدى دائرية أو اتساع القطع الناقص .



الاختلاف المركزي

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad \text{أو} \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

لأي قطع ناقص ، فإن الاختلاف المركزي يعطي بالصيغة $e = \frac{c}{a}$ حيث $c^2 = a^2 - b^2$

$$0 < e < 1$$

حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص :

$$\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1$$

الحل :

$$a^2 = 19, a = \sqrt{19}$$

ثانياً: نستعمل قيمتي a, c لإيجاد قيمة الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{19}}$$

$$e \approx 0.32$$

أولاً: نحدد قيمة c

$$c^2 = a^2 - b^2$$

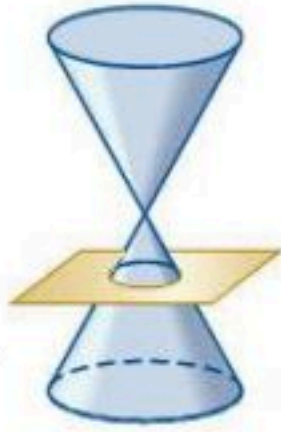
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{19 - 17}$$

$$c = \sqrt{2}$$

مثال

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة



الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

كتابة معادلة الدائرة

طرفا قطر فيها معلومان

اكتب معادلة الدائرة

إذا كان طرفا قطر فيها $(1, 5)$, $(3, -3)$ نوجد المركز (h, k) باستخدام قانون نقطة المنتصف

الحل :

$$(h, k) = \left(\frac{3 + 1}{2}, \frac{-3 + 5}{2} \right)$$

$$(h, k) = (2, 1)$$

نوجد طول نصف القطر باستخدام قانون المسافة بين نقطتين

(بين المركز وأحدى نقاط طرفا القطر)

$$r = \sqrt{(2 - 3)^2 + (1 + 3)^2}$$

$$r = \sqrt{17}$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{17})^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 17$$

مركزها وقطرها معلومان

اكتب معادلة الدائرة التي

مركزها $(0, 0)$ ونصف قطرها 3

الحل :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 3^2$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانياً

القطع الزائد هو **المحل الهندسي لجمع النقاط** الواقعة في المستوى والتي يكون **الفرق المطلق** (القيمة المطلقة للفرق) بين بعديها عن نقطتين ثابتتين (تسميان **البؤرتين**) يساوي مقداراً ثابتاً هو $2a$ ، حيث a البعد بين **المركز** وأحد **الرأسين**.

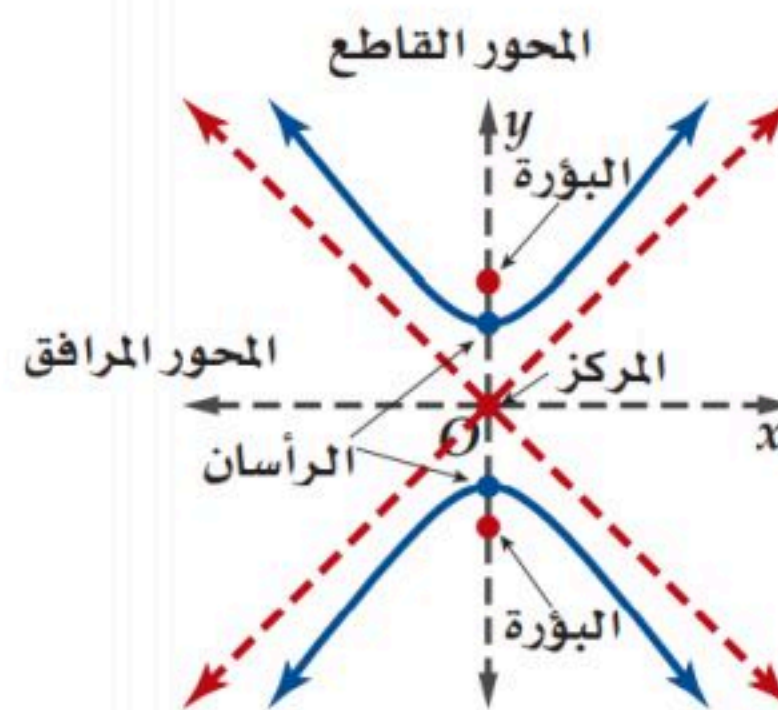
البؤرتان هما **نقطتان** تقعان على **المحور القاطع** والمسافة بينهما $2c$ وهو طول البعد البؤري **والفرق المطلق** بين بعديهما عن أي **نقطة** من نقاط منحنى القطع الزائد يساوي مقداراً ثابتاً.

المركز هو **نقطة** منتصف المسافة بين **البؤرتين** والرأسين.

الرأسان هما **نقطتان** تقاطع **القطعة المستقيمة** الواصلة بين **البؤرتين** مع كل من فرعي المنحنى.

المحور القاطع هو أحد **محوري تماثل** القطع الزائد وهو **القطعة المستقيمة** الواصلة بين **الرأسين** ويمر **بالمركز**.

المحور المرافق هو أحد **محوري تماثل** القطع الزائد وهو **القطعة المستقيمة** العمودية على **المحور القاطع** ويمر **بالمركز**.





خصائص القطع الزائد

القطع الزائد		نوع القطع
		التمثيل البياني
$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	المعادلة
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$		إيجاد c "البعد بين المركز والبؤرة"
هو العدد الأول		a^2
حسب اللي فوق العدد الأول a^2		تحديد الاتجاه
أفقي " x " فوق الـ a^2	رأسي " y " فوق الـ a^2	
طول المحور القاطع		$2a$
طول المحور المرافق		$2b$
طول البعد البؤري		$2c$
(h, k)		المركز
القاطع $x = h$	القاطع $y = k$	معادلة المحور
المرافق $y = k$	المرافق $x = h$	
$(h, k \pm a)$	$(h \pm a, k)$	الرأسان " a "
$(h, k \pm c)$	$(h \pm c, k)$	البؤرتان " c "
.....		الرأسان المرافقان " b "
$(y - k) = \pm \frac{a}{b}(x - h)$	$(y - k) = \pm \frac{b}{a}(x - h)$	خطا التقارب

تحديد خصائص القطع الزائد

الاتجاه : رأسي

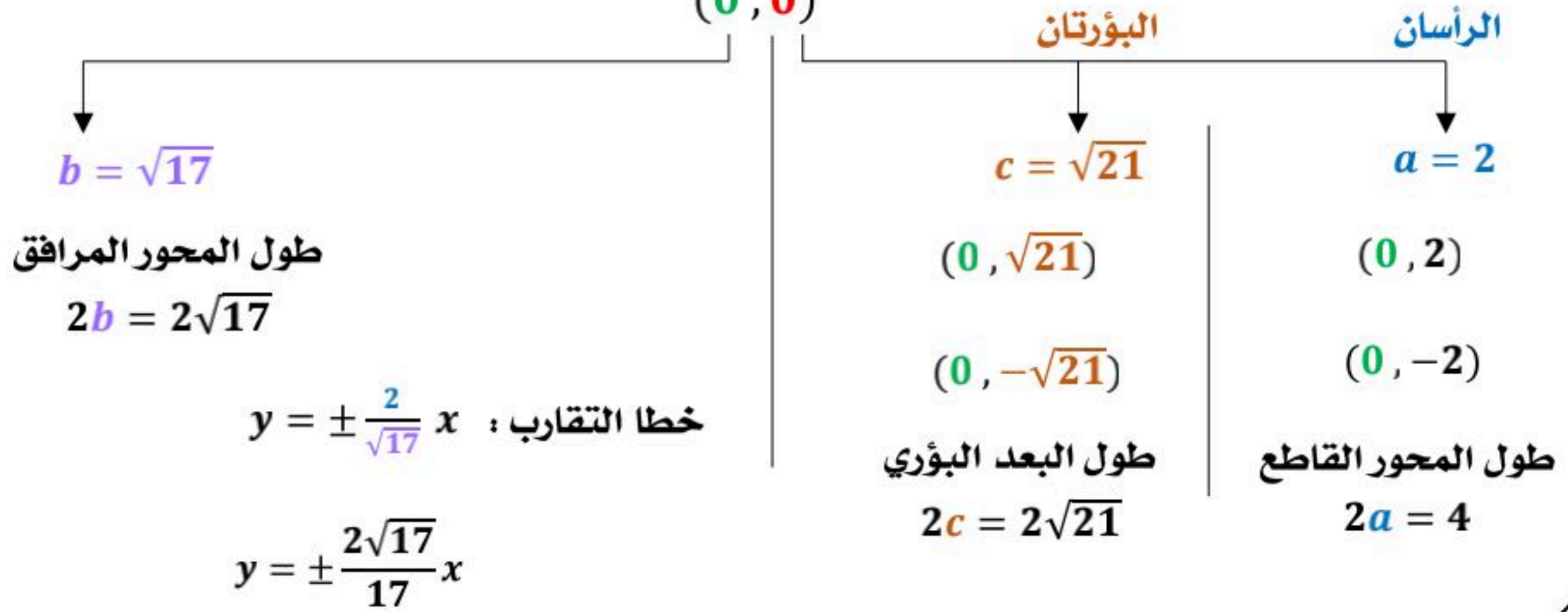
$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} = 1$$

الحل :

مثال

$$h = 0, k = 0, a = 2, b = \sqrt{17}, c = \sqrt{4 + 17} = \sqrt{21}$$

معادلة المحور المرافق $y = 0$ → المركز $(0, 0)$ ← معادلة المحور القاطع $x = 0$



تحديد خصائص القطع الزائد

الاتجاه : أفقي

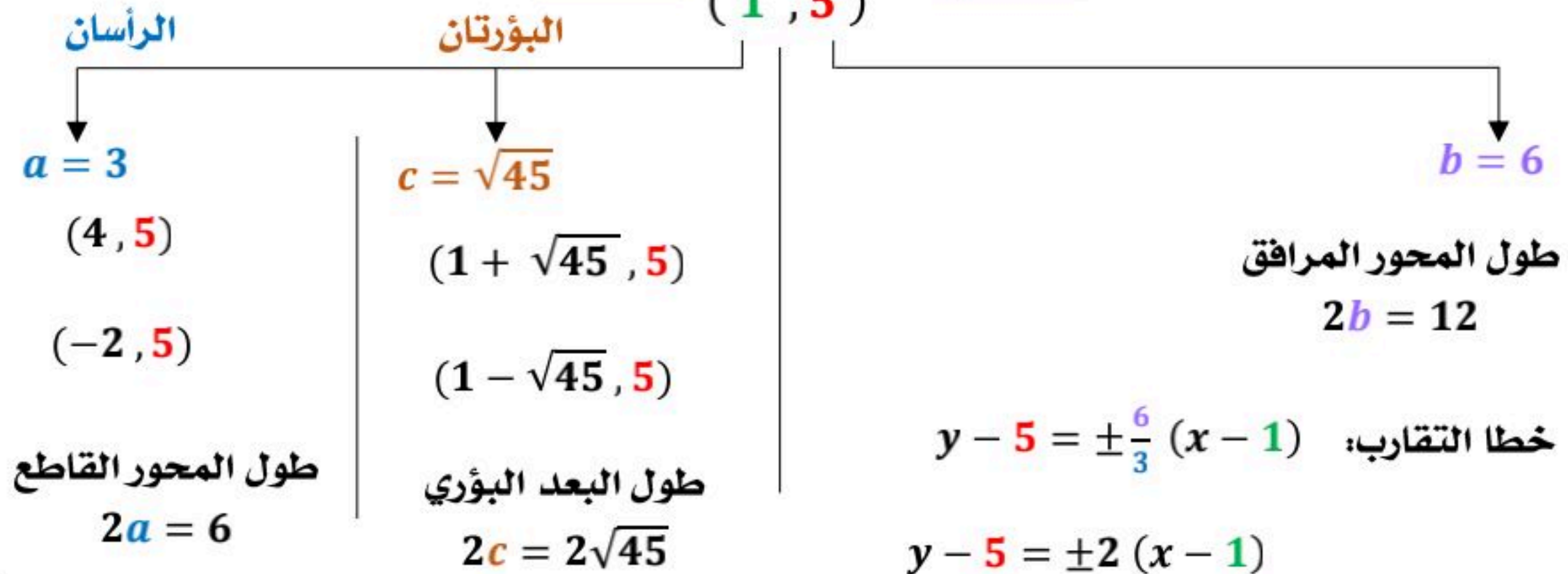
$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{36} = 1$$

الحل :

مثال

$$h = 1, k = 5, a = 3, b = 6, c = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$$

معادلة المحور القاطع $y = 5$ → المركز $(1, 5)$ ← معادلة المحور المرافق $x = 1$



كتابة معادلة قطع زائد على الصورة القياسية

اكتب المعادلة على الصورة القياسية للقطع الزائد:

$$4y^2 - 9x^2 - 8y - 36x = 68$$

الحل :

مثال

$$(4y^2 - 8y) + (-9x^2 - 36x) = 68 \quad \leftarrow \text{تجميع المتشابهات}$$

$$4(y^2 - 2y) - 9(x^2 + 4x) = 68 \quad \leftarrow \text{أخذ عوامل مشتركة}$$

$$4(y^2 - 2y + \square) - 9(x^2 + 4x + \square) = 68 + 4(\square) - 9(\square) \quad \leftarrow \text{اكمل المربع}$$

$$4(y^2 - 2y + 1) - 9(x^2 + 4x + 4) = 68 + 4(1) - 9(4)$$

$$4(y - 1)^2 - 9(x + 2)^2 = 36 \quad \leftarrow \text{تبسيط}$$

$$\frac{4(y - 1)^2}{36} - \frac{9(x + 2)^2}{36} = \frac{36}{36} \quad \leftarrow \text{بالقسمة والتبسيط}$$

$$\frac{(y - 1)^2}{9} - \frac{(x + 2)^2}{4} = 1$$

كتابة معادلة القطع الزائد بمعلومية بعض خصائصه

معطى الرأسان والبؤرتان

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(-3, 2)$, $(-3, -6)$ والبؤرتان $(-3, 3)$, $(-3, -7)$

مثال

الحل :

نوجد b^2 من القانون

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = 25 - 16 = 9$$

المحور القاطع رأسي فإن a^2

يرتبط بالحد y^2

$$\frac{(y + 2)^2}{16} - \frac{(x + 3)^2}{9} = 1$$

نوجد a وهي المسافة بين أي من الرأسين والمركز

$$= \sqrt{(-3 + 3)^2 + (-6 + 2)^2}$$

$$a = 4 \rightarrow a^2 = 16$$

نوجد c وهي المسافة بين أي من البؤرتين والمركز

$$= \sqrt{(-3 + 3)^2 + (3 + 2)^2}$$

$$c = 5 \rightarrow c^2 = 25$$

في الرأسين إحداثيي x متساويان
فإن المحور القاطع رأسي

نوجد المركز نقطة منتصف الرأسين

$$\left(\frac{-3 - 3}{2}, \frac{-6 + 2}{2} \right)$$

$$(h, k) = (-3, -2)$$

معطى الرأسان وخطا التقارب

مثال

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(-3, 0)$, $(-9, 0)$ وخطا التقارب $y = 2x - 12$, $y = -2x + 12$

الحل :

المحور القاطع أفقي فإن a^2

يرتبط بالحد x^2

$$\frac{(x+6)^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$$

نوجد a وهي المسافة بين أي من الرأسين والمركز

$$= \sqrt{(-3+6)^2 + (0-0)^2}$$

$$a = 3 \rightarrow a^2 = 9$$

ميل خطي التقارب $\pm \frac{b}{a}$ نستخدم

الميل الموجب لإيجاد b

$$\frac{b}{a} = 2 \rightarrow \frac{b}{3} = 2 \rightarrow b = 6$$

$$b^2 = 36$$

في الرأسين إحداثي y متساويان فإن المحور القاطع أفقي

نوجد المركز نقطة منتصف الرأسين

$$\left(\frac{-3-9}{2}, \frac{0+0}{2} \right)$$

$$(h, k) = (-6, 0)$$

معطى الرأسان وطول المحور المرافق

مثال

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص:

الرأسان $(3, 2)$, $(3, 6)$ وطول المحور المرافق 10 وحدات

الحل :

المحور القاطع رأسي فإن a^2

يرتبط بالحد y^2

$$\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{25} = 1$$

نوجد a وهي المسافة بين أي من الرأسين والمركز

$$= \sqrt{(3-3)^2 + (2-4)^2}$$

$$a = 2 \rightarrow a^2 = 4$$

طول المحور المرافق $2b = 10$

$$b = 5$$

$$b^2 = 25$$

في الرأسين إحداثي x متساويان فإن المحور القاطع رأسي

نوجد المركز نقطة منتصف الرأسين

$$\left(\frac{3+3}{2}, \frac{2+6}{2} \right)$$

$$(h, k) = (3, 4)$$

الاختلاف المركزي للقطع الزائد

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{أو} \quad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{لأي قطع زائد}$$

حيث $c^2 = a^2 + b^2$ ، فإن الاختلاف المركزي يعطي بالصيغة $e = \frac{c}{a}$

$$e > 1$$

حدد الاختلاف المركزي للقطع الزائد :

$$\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1$$

مثال

الحل :

$$a^2 = 64 , a = 8$$

ثانياً: نستعمل قيمتي a , c لإيجاد قيمة الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{12}{8}$$

$$e = \frac{3}{2} = 1.5$$

أولاً: نحدد قيمة c

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{64 + 80}$$

$$c = \sqrt{144} = 12$$

الاختلاف المركزي للقطوع :

القطع الناقص $0 < e < 1$

القطع الزائد $e > 1$

الدائرة $e = 0$

ملاحظة

الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية

يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي على الصورة العامة :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

على أن لا تساوي A, B, C جميعها أصفاراً . ويمكن تحويل هذه الصورة إلى الصورة القياسية

باستعمال طريقة إكمال المربع إذا كانت $B = 0$

مثال

اكتب المعادلة على الصورة القياسية

$$4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$$

ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله .

الحل :

$$4(x^2 - 4x) + y^2 + 8y = 4 \quad \leftarrow \text{تجميع المتشابهات مع أخذ عوامل}$$

$$4(x^2 - 4x + \square) + (y^2 + 8y + \square) = 4 + 4(\square) + \square \quad \leftarrow \text{إكمال المربع}$$

$$4(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 8y + 16) = 4 + 4(4) + 16$$

$$4(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 8y + 16) = 36 \quad \leftarrow \text{تبسيط}$$

$$4(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 36 \quad \leftarrow \text{تبسيط}$$

$$\frac{4(x - 2)^2}{36} + \frac{(y + 4)^2}{36} = \frac{36}{36} \quad \leftarrow \text{قسمة وتبسيط}$$

$$\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y + 4)^2}{36} = 1$$

نوع القطع المخروطي : قطع ناقص

قطع ناقص

$$B^2 - 4AC < 0, A \neq C \text{ أو } B \neq 0$$

مثال: حدد نوع القطع المخروطي :
 $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$

الحل :

$$A = 1, B = 0, C = 4$$

$$B^2 - 4AC$$

$$(0)^2 - 4(1)(4) = -16$$

قطع ناقص

قطع مكافئ

$$B^2 - 4AC = 0$$

مثال: حدد نوع القطع المخروطي :
 $6y^2 - 24y + 28 - x = 0$

الحل :

$$A = 0, B = 0, C = 6$$

$$B^2 - 4AC$$

$$(0)^2 - 4(0)(6) = 0$$

قطع مكافئ

تحديد أنواع القطوع المخروطية

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

باستعمال المميز

$$B^2 - 4AC$$

قطع زائد

$$B^2 - 4AC > 0$$

مثال: حدد نوع القطع المخروطي :
 $3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$

الحل :

$$A = 4, B = 3, C = 0$$

$$B^2 - 4AC$$

$$(3)^2 - 4(4)(0) = 9$$

قطع زائد

دائرة

$$B^2 - 4AC < 0, B = 0 \text{ و } A = C$$

مثال: حدد نوع القطع المخروطي :
 $8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$

الحل :

$$A = 8, B = 0, C = 8$$

$$B^2 - 4AC$$

$$(0)^2 - 4(8)(8) = -256$$

دائرة

مقدمة في المتجهات

1-1

اختبر نفسك

الدرس

المتجهات في المستوى الإحداثي

1-2

اختبر نفسك

الدرس

الضرب الداخلي

1-3

اختبر نفسك

الدرس

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

1-4

اختبر نفسك

الدرس

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

1-5

اختبر نفسك

الدرس

أسئلة تحصيلي

الكميات الفيزيائية

كمية متجهة

هي كمية لها مقدار واتجاه .

يسير قارب بسرعة 15 m/h في اتجاه الجنوب الغربي .

كمية قياسية (عددية)

هي كمية لها مقدار فقط وليس لها اتجاه .

طول قطعة مستقيمة 5 cm

المتجهات

المتجه:

قطعة مستقيمة لها اتجاه أو سهم لها نقطة بداية A ولها نقطة نهاية B يرمز للمتجه بالرمز \overrightarrow{AB} أو \vec{a} أو a

طول المتجه:

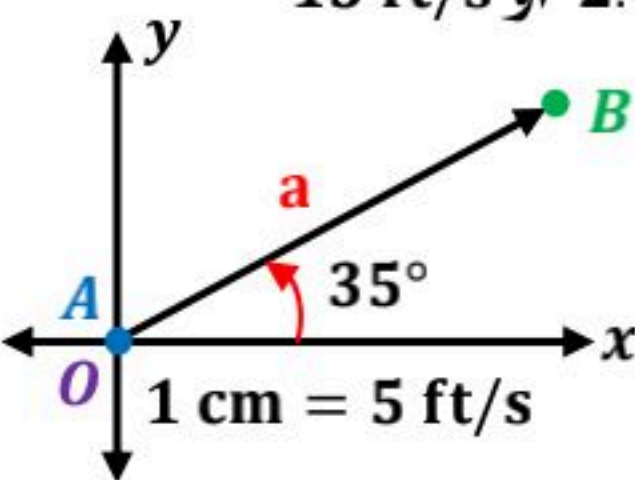
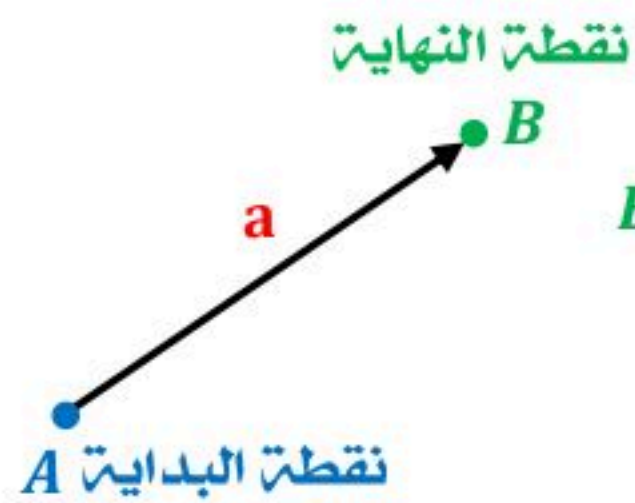
طول القطعة المستقيمة التي تمثله ويرمز لطول المتجه a بالرمز $|a|$ مثلاً : إذا كان مقياس الرسم $1 \text{ cm} = 5 \text{ ft/s}$ فإن الطول يساوي 2.6×5 أو 13 ft/s

الوضع القياسي للمتجه:

إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل .

اتجاه المتجه:

- الاتجاه الأفقي .
- الاتجاه الربعي .
- الاتجاه الحقيقي .



تمثيل المتجه هندسياً

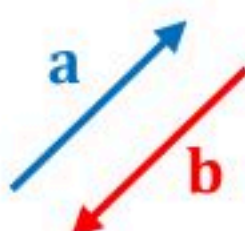
النوع	خصائصه	الرسم
الاتجاه الأفقي	يستعمل المحور الأفقي الزاوية التي يصنعها مع محور x الموجب ويكون عكس عقارب الساعة . مثال : \vec{a} بزاوية قياسها 60° مع الاتجاه الأفقي	
الاتجاه الرباعي ϕ (فائي)	يستعمل المحور الرأسى y إما شمالاً N أو جنوباً S يكون قياس الزاوية بين 0° و 90° شرقاً أو غرباً المحور الرأسى وتكتب الزاوية بين حرفين مثال : \vec{a} باتجاه $N 40^\circ E$ \vec{v} باتجاه $S 50^\circ W$	
الاتجاه الحقيقي	يبدأ من الشمال N ويكون مع عقارب الساعة وتكتب الزاوية بثلاثة أرقام مثال : \vec{m} باتجاه 030° \vec{z} باتجاه 140° إذا كان قياس الزاوية ثلاث أرقام تكتب كما هي .	

أنواع المتجهات

المتجهان المتعاكسان

$$\vec{a} = -\vec{b}$$

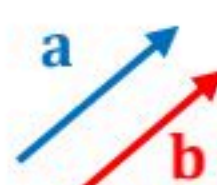
لهما الطول نفسه واتجاهان متعاكسان.



المتجهات المتساوية

$$\vec{a} = \vec{b}$$

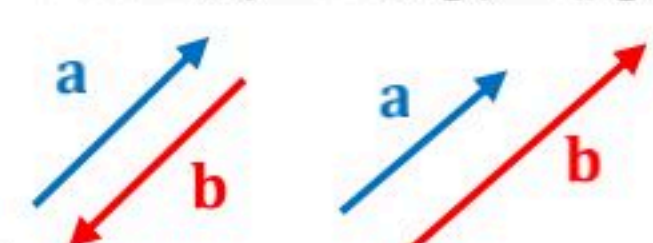
لها الاتجاه نفسه والطول نفسه .



المتجهات المتوازية

$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$

لها الاتجاه نفسه أو اتجاهان متعاكسان وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه.



المحصلة: هي المتجه الناتج من جمع متجهين أو أكثر .

محصلة ناتج جمع متجهين أو أكثر لها الاتجاه نفسه

هو متجه طوله يساوي مجموع أطوال هذه المتجهات ، واتجاهه هو اتجاه المتجهات الأصلية نفسه .



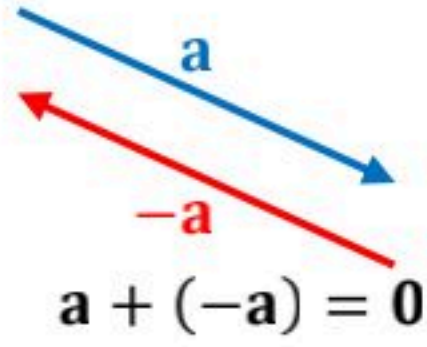
محصلة ناتج جمع متجهين متوازيين متعاكسين

هو متجه طوله يساوي القيمة المطلقة للفرق بين طولي المتجهين واتجاهه هو اتجاه المتجه الأكبر طولاً .



محصلة ناتج جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه

هو المتجه الصفري ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو 0 وطوله صفر وليس له اتجاه .



إيجاد المحصلة هندسياً

قاعدة المثلث

طريقته:

- تلتقي نقطة نهاية المتجه a مع نقطة بداية المتجه b
- **المحصلة** هي المتجه المرسوم من نقطة بداية المتجه a إلى نهاية المتجه b

قاعدة متوازي الأضلاع

طريقته:

- تلتقي نقطة بداية المتجه a مع نقطة بداية المتجه b
- نكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعا a, b
- **المحصلة** هي المتجه الذي يمثل قطر متوازي الأضلاع الذي بدايته نقطة التقاء بدايتي المتجهين.

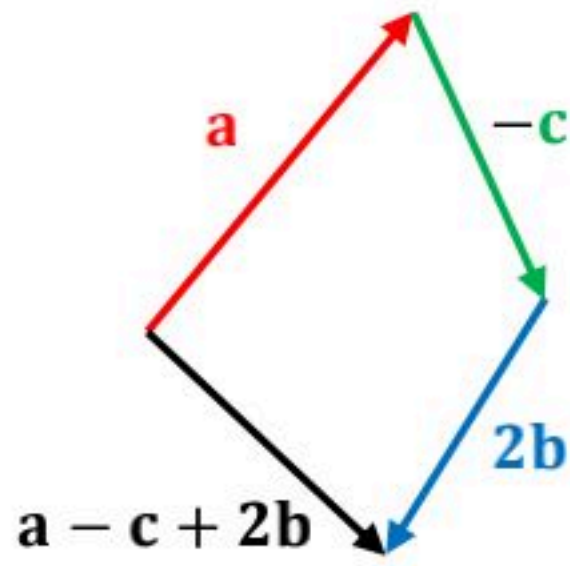
العمليات على المتجهات

$|k|$ القيمة
المطلقة للعدد
الحقيقي k

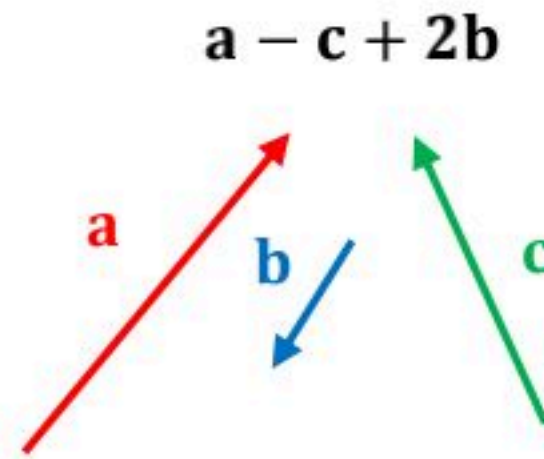
$|v|$ طول
المتجه v

ضرب متجه في عدد حقيقي
إذا ضرب المتجه v في عدد حقيقي k ، فإن طول المتجه kv هو $|k| |v|$ ،
ويتحدد اتجاهه بإشارة k
إذا كانت $k > 0$ ، فإن اتجاه kv هو اتجاه v نفسه .
إذا كانت $k < 0$ ، فإن اتجاه kv هو عكس اتجاه v .

ارسم المتجه التالي :



مثال



المركبات المتعامدة



المركبة الأفقية

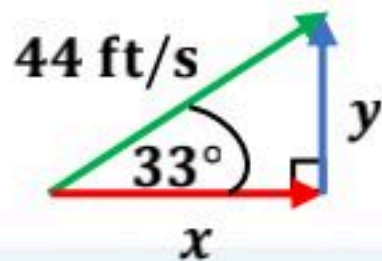
المركبة الرأسية

هي مركبتان متعامدتان واحدة أفقية والأخرى رأسية .

مقدار المركبة الأفقية $|x| = r \cos \theta$

مقدار المركبة الرأسية $|y| = r \sin \theta$

يركل لاعب كرة قدم من سطح الأرض بسرعة مقدارها 44 ft/s ، وبزاوية 33° مع سطح الأرض.



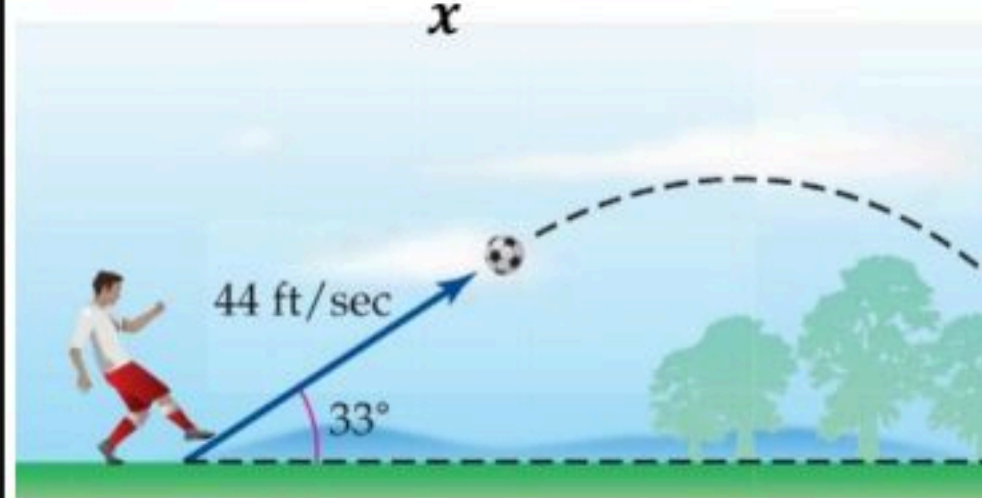
مثال

مقدار المركبة الأفقية للسرعة $|x| = r \cos \theta$

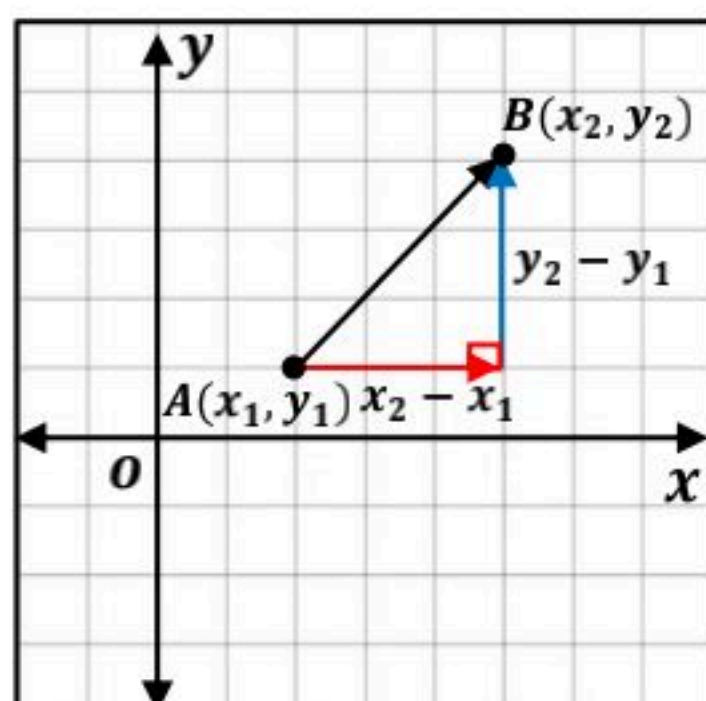
$$|x| = 44 \cos 33^\circ \approx 36.9 \text{ ft/s}$$

مقدار المركبة الرأسية للسرعة $|y| = r \sin \theta$

$$|y| = 44 \sin 33^\circ \approx 23.96 \text{ ft/s}$$



الصورة الإحداثية لمتجه



الصورة الإحداثية لـ \overrightarrow{AB} الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$

ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي: $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$

مثال :

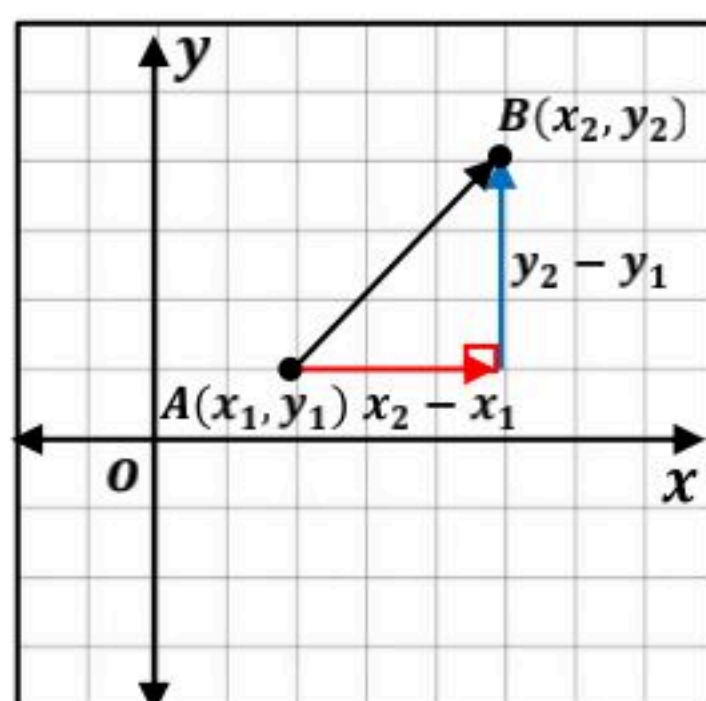
الصورة الإحداثية لـ \overrightarrow{AB} الذي نقطة بدايته $A(-2, -7)$

ونقطة نهايته $B(6, 1)$ هي:

$$= \langle 6 - (-2), 1 - (-7) \rangle$$

$$= \langle 8, 8 \rangle$$

طول المتجه



طول \overrightarrow{AB} الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$

ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هو:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال :

طول \overrightarrow{AB} الذي نقطة بدايته $A(-2, -7)$

ونقطة نهايته $B(6, 1)$ هو:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (1 - (-7))^2}$$

$$= \sqrt{128} \approx 11.3$$

إذا كانت الصورة الإحداثية للمتجه هي: $\langle a, b \rangle$ فإن طوله $= \sqrt{a^2 + b^2}$

من مثال : الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB} = \langle 8, 8 \rangle$ فإن طوله هو:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(8)^2 + (8)^2} = \sqrt{128} \approx 11.3$$

العمليات على المتجهات

إذا كان $a = \langle a_1, a_2 \rangle$, $b = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين و k عدد حقيقي، فإن :

ضرب متجه في عدد حقيقي	طرح متجهين	جمع متجهين
$ka =$	$a - b =$	$a + b =$
$\langle ka_1, ka_2 \rangle$	$\langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$	$\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

مثال

إذا كان : $a = \langle 2, 5 \rangle$, $b = \langle -3, 0 \rangle$, $c = \langle -4, 1 \rangle$

$$\begin{aligned}
 & 2c + 4a - b \\
 &= 2\langle -4, 1 \rangle + 4\langle 2, 5 \rangle - \langle -3, 0 \rangle \\
 &= \langle -8, 2 \rangle + \langle 8, 20 \rangle + \langle 3, 0 \rangle \\
 &= \langle 3, 22 \rangle
 \end{aligned}$$

متجه الوحدة

u

متجه طوله 1 ويرمز له بالرمز u

طريقة إيجاد : قسمه المتجه على طوله . $u = \frac{v}{|v|}$

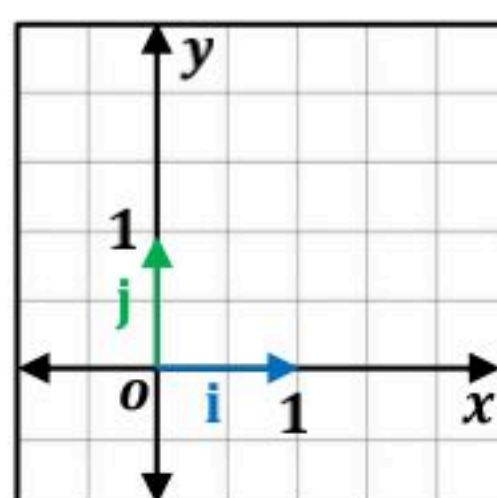
مثال

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه $w = \langle 6, -2 \rangle$

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{w}{|w|} \\
 &= \frac{\langle 6, -2 \rangle}{|\langle 6, -2 \rangle|} \\
 &= \frac{\langle 6, -2 \rangle}{\sqrt{6^2 + (-2)^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\langle 6, -2 \rangle}{\sqrt{40}} \\
 &= \left\langle \frac{6}{\sqrt{40}}, \frac{-2}{\sqrt{40}} \right\rangle \\
 &= \left\langle \frac{6\sqrt{40}}{40}, \frac{-2\sqrt{40}}{40} \right\rangle \quad \leftarrow \text{انطاق المقام} \\
 &= \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{-\sqrt{10}}{10} \right\rangle \quad \leftarrow \text{بالتبسيط}
 \end{aligned}$$

متجه الوحدة القياسي

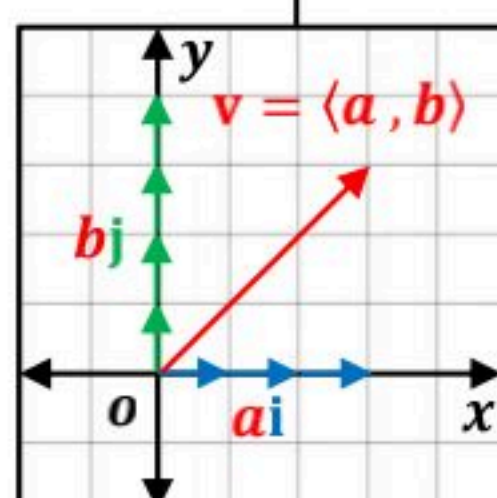


هما متجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x والاتجاه الموجب لمحور y

ويرمز لهما بالرمزين $i = \langle 1, 0 \rangle$, $j = \langle 0, 1 \rangle$

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $v = \langle a, b \rangle$

بالصورة: $v = ai + bj$



التوافق الخطي

ملاحظة

i عدد تخيلي
 i متجه الوحدة

يقصد به كتابة المتجه بدلالة متجهي الوحدة i, j
تسمى الصورة $ai + bj$ توافق خطي لمتجهي الوحدة.

مثال

اكتب المتجه \overline{DE} على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة i, j

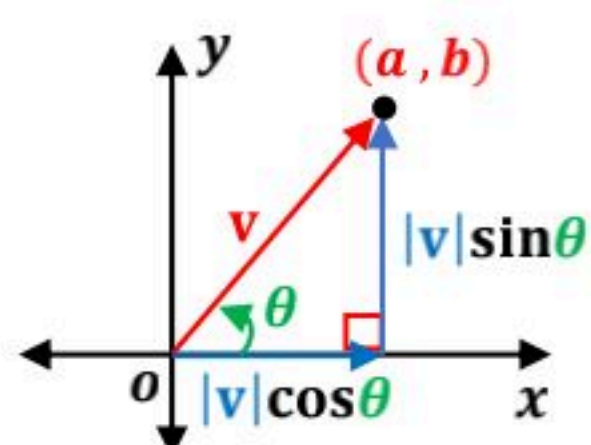
$$D(-6, 0), E(2, 5)$$

أولاً: نكتب المتجه بالصورة الإحداثية $\overline{DE} = \langle 2 - (-6), 5 - 0 \rangle = \langle 8, 5 \rangle$

ثانياً: نعيد كتابتها كتوافق خطي $\overline{DE} = \langle 8, 5 \rangle = 8i + 5j$

إيجاد الصورة الإحداثية

الصورة الإحداثية لمتجه معطى طوله و زاوية اتجاهه مع الأفقي



طول المتجه $|v|$ و الزاوية θ

$$v = \langle |v| \cos \theta, |v| \sin \theta \rangle$$

ويمكن كتابتها كتوافق خطي

$$v = |v| (\cos \theta) \mathbf{i} + |v| (\sin \theta) \mathbf{j}$$

مثال

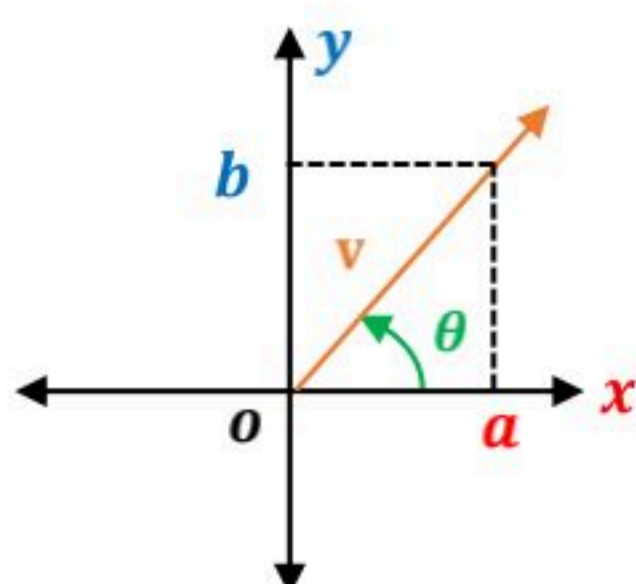
أوجد الصورة الإحداثية للمتجه v المعطى

طوله $|v| = 8$ و زاوية الاتجاه مع الأفقي $\theta = 45^\circ$

$$v = \langle |v| \cos \theta, |v| \sin \theta \rangle$$

$$v = \langle 8 \cos 45^\circ, 8 \sin 45^\circ \rangle = \langle 4\sqrt{2}, 4\sqrt{2} \rangle$$

زوايا الاتجاه للمتجهات



زاوية اتجاه المتجه مع الاتجاه الأفقي (الموجب لمحور x)

إذا كان المتجه $v = \langle a, b \rangle$ وذلك بحل المعادلة: $\tan \theta = \frac{b}{a}$

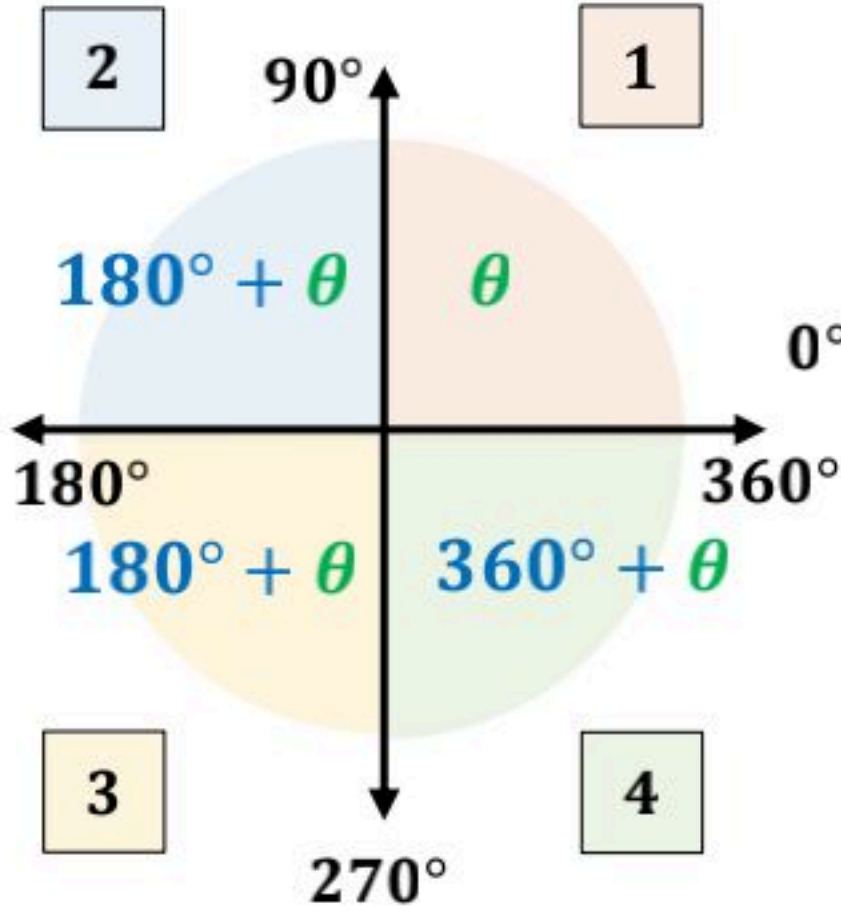
$$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

لايجاد الزاوية

1 نحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية :

- إذا كانت $\tan \theta$ موجبة فإن الزاوية θ تقع في الربع الأول أو الربع الثالث.
 - إذا كانت $\tan \theta$ سالبة فإن الزاوية θ تقع في الربع الثاني أو الربع الرابع.
- لتحديد الربع بشكل أدق نستعمل قيمتي a و b حيث تؤخذ a من محور x وتؤخذ b من محور y .

2 نحدد قيمة الزاوية θ وذلك عن طريق $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$



الزاوية المطلوبة مع الاتجاه الأفقي

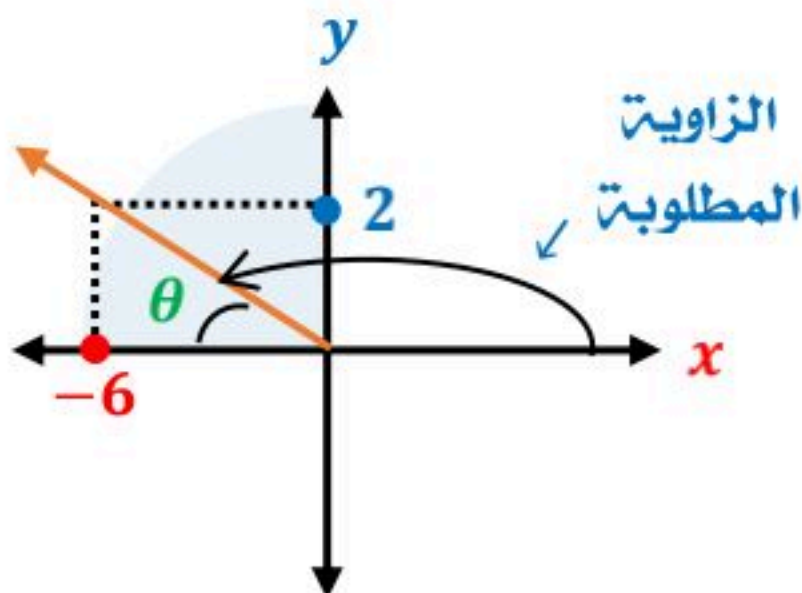
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الأول تبقى كما هي (موجبة)
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الثاني تكون (سالبة) ولايجادها نضيف 180° (لأنها ستكون أقل من 180°)
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الثالث تكون (موجبة) ولايجادها نضيف 180° (لأنها ستكون أكبر من 180°)
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الرابع تكون (سالبة) ولايجادها نضيف 360° (لأنها ستكون أقل من 360°)

أوجد زاوية المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور x :

مثال

$$-6i + 2j$$

$$a = -6, b = 2$$



$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{b}{a} \\ \tan \theta &= \frac{2}{-6} \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{2}{-6} \\ \theta &= -18.4^\circ \end{aligned}$$

θ تقع في الربع الثاني

$$\begin{aligned} &180^\circ + \theta \\ &= 180 - 18.4 \\ &= 161.6^\circ \end{aligned}$$

تطبيقات العمليات على المتجهات

إيجاد محصلة سرعة الحركة

1 نوجد متجه السرعة الأول وغالباً يكون متجه أفقي $\mathbf{v}_1 = \langle a, 0 \rangle$

2 نوجد الصورة الإحداثية لمتجه السرعة الثاني والذي مقداره \mathbf{v}_2 وزاوية اتجاهه θ
 $\mathbf{v}_2 = \langle |\mathbf{v}_2| \cos \theta, |\mathbf{v}_2| \sin \theta \rangle$

3 نوجد مجموع المتجهين $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \langle a, b \rangle$

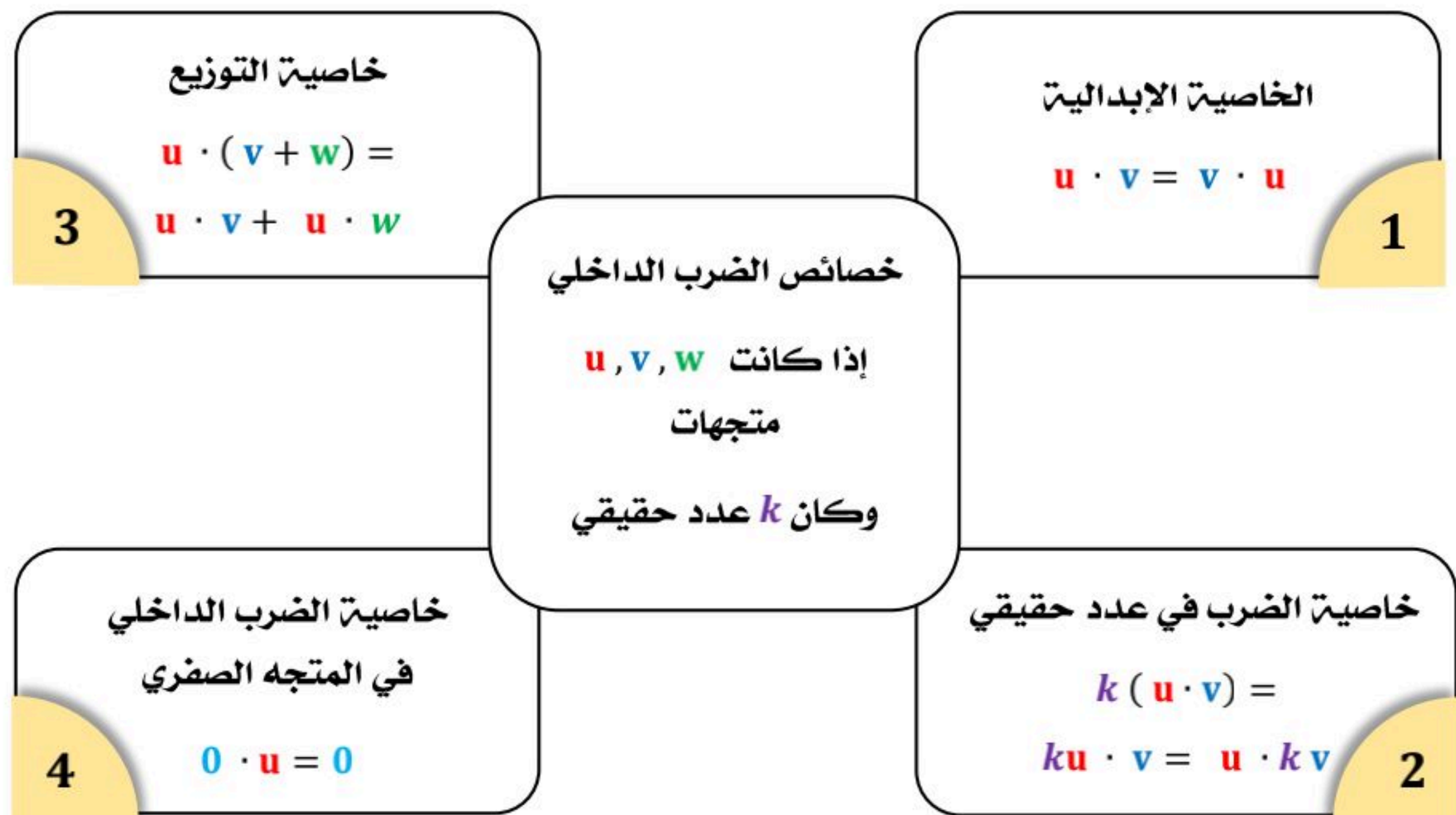
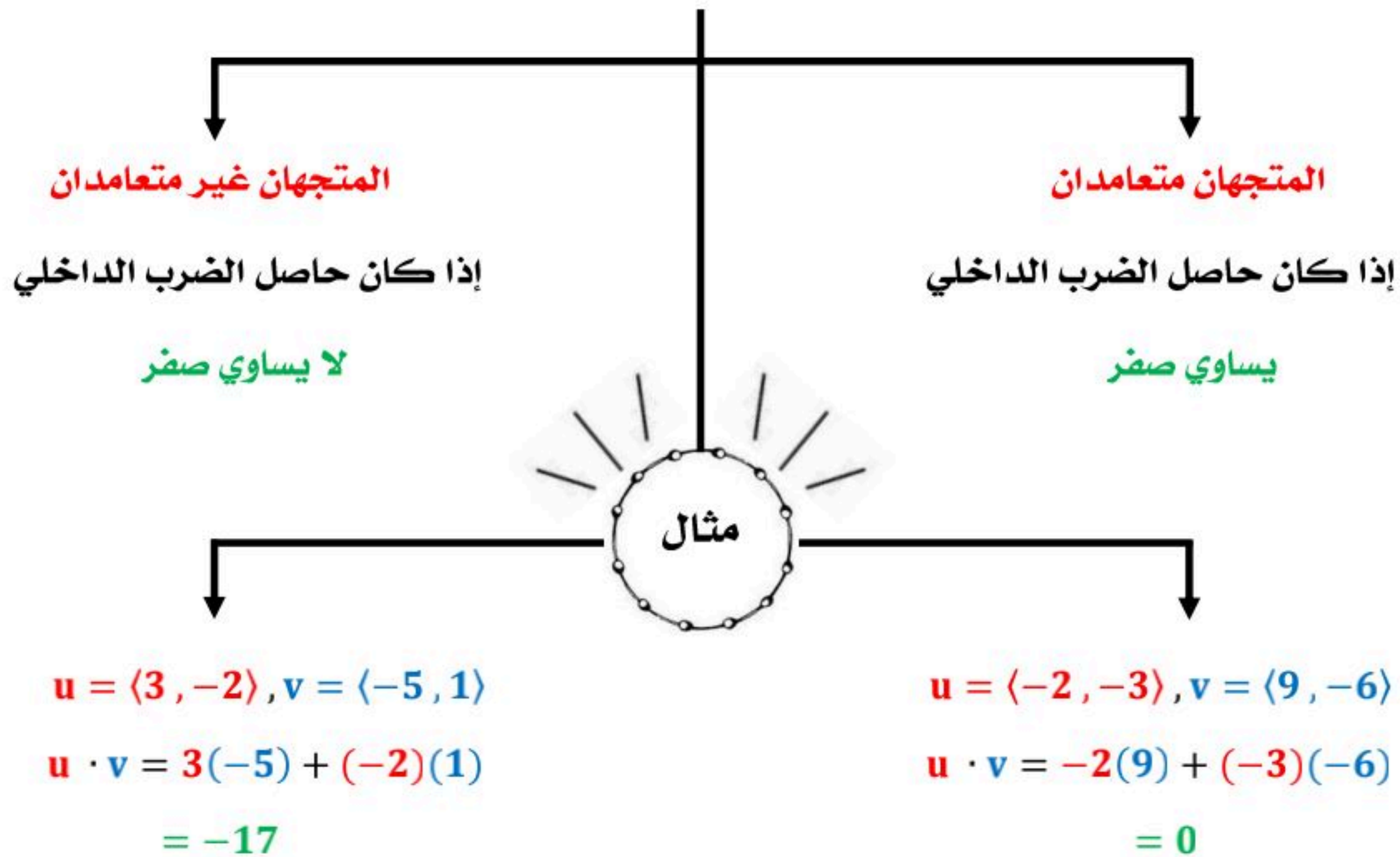
4 نوجد محصلة السرعتين باستخدام قانون طول المتجه
 $v = \sqrt{a^2 + b^2}$

إيجاد اتجاه الحركة

1 بعد إيجاد مجموع المتجهين $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \langle a, b \rangle$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي

الضرب الداخلي للمتجهين $a = \langle a_1, a_2 \rangle$, $b = \langle b_1, b_2 \rangle$ $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2$ → الناتج يكون عدداً وليس متجهاً

العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$$

5

مثال

استعمل الضرب الداخلي لإيجاد طول المتجه $\mathbf{c} = \langle -1, -7 \rangle$

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}} \quad \text{فإن} \quad |\mathbf{c}|^2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$$

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{(-1, -7) \cdot (-1, -7)}$$

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{50} = 7.07$$

الزاوية بين المتجهين

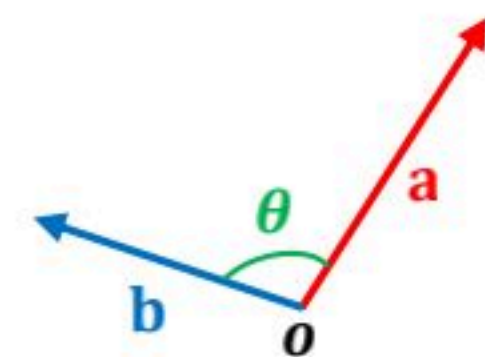
إذا كانت الزاوية بين المتجهين 90° فإنهما متعامدان .

إذا كانت الزاوية بين المتجهين 0° أو 180° فإنهما متوازيان .

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين \mathbf{a} , \mathbf{b} فإن :

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$



مثال

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين \mathbf{u} , \mathbf{v} :

$$\mathbf{u} = \langle -5, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-5(4) + (-2)4}{\sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} \sqrt{4^2 + 4^2}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-28}{\sqrt{29} \sqrt{32}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-28}{4\sqrt{58}} = 156.8^\circ$$

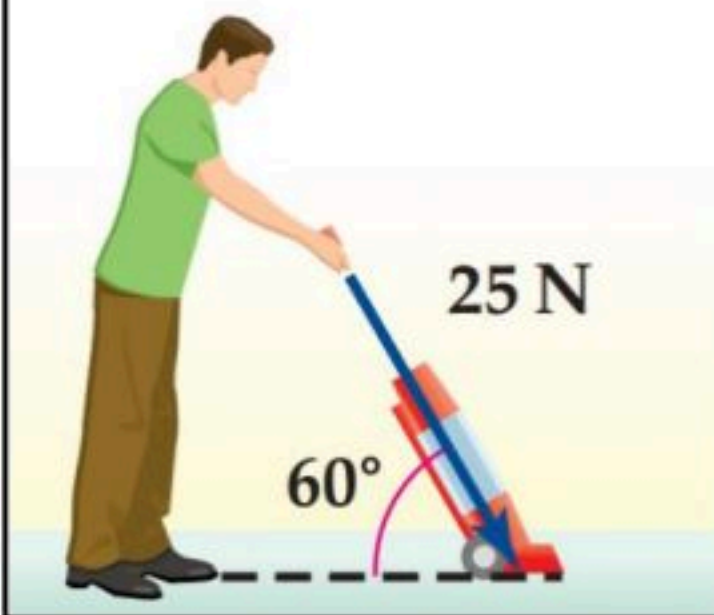
الشغل



مقدار القوة المؤثرة في جسم لتحريكه مضروباً في المسافة المتجهة التي تحركها .

$$W = |F| |\overline{AB}|$$

مثال



يدفع إبراهيم مكنسة كهربائية بقوة مقدارها 25 N ، إذا كان
قياس الزاوية بين ذراع المكنسة و سطح الأرض 60° ، فأوجد الشغل
بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m

$$W = F \cdot \overline{AB}$$

2 الصورة الإحداثية لمتجه المسافة هي :

$$\overline{AB} = \langle 6, 0 \rangle$$

1 الصورة الإحداثية للقوة المتجه F

بدلالة مقدار القوة ، وزاوية الاتجاه هي :

$$F = \langle 25 \cos 60^\circ, 25 \sin 60^\circ \rangle$$

$$F = \langle 12.5, 21.6 \rangle$$

$$W = F \cdot \overline{AB}$$

$$W = \langle 12.5, 21.6 \rangle \cdot \langle 6, 0 \rangle$$

$$W = 75 + 0 = 75\text{ J}$$

وحدات الشغل
في النظام
المتري
نيوتن-متر
أو جول

طريقة أخرى مختصرة

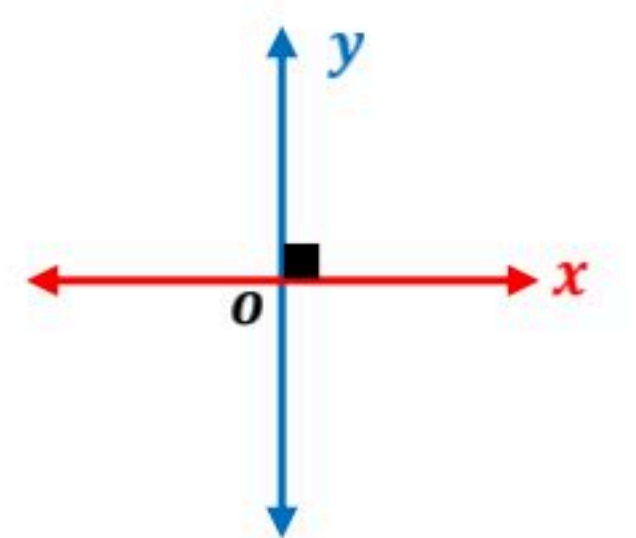
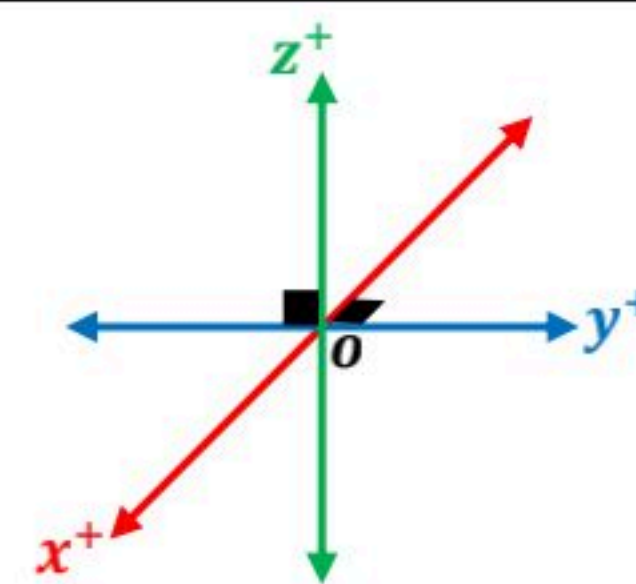
$$W = d \cdot F \cdot \cos \theta$$

$$d = 6, \quad F = 25, \quad \theta = 60^\circ$$

$$W = 6 (25) \cos 60^\circ$$

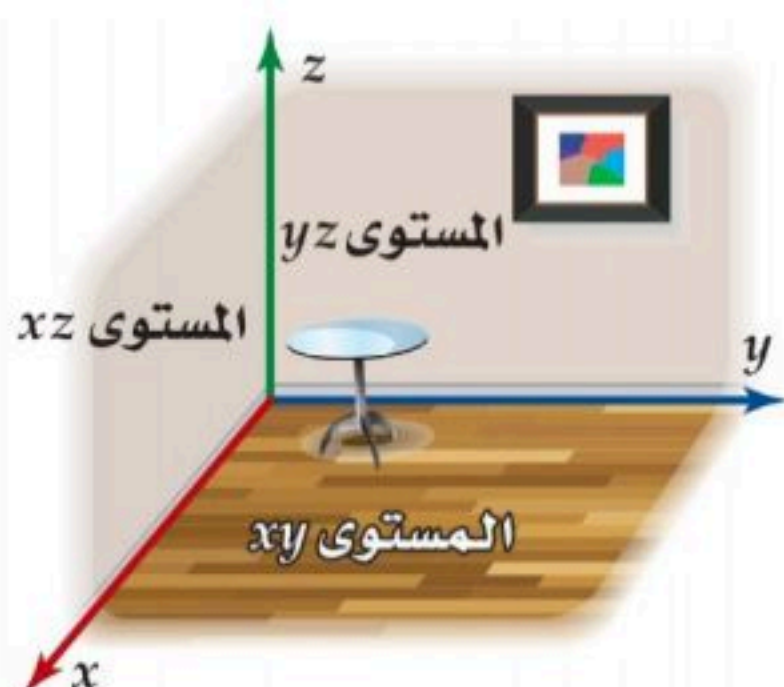
$$W = 75\text{ J}$$

الفرق بين نظام المستوى الإحداثي ونظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد

المستوى الإحداثي	نوع النظام	المستوى الثلاثي الأبعاد
2	عدد المحاور	3
يتشكل بواسطة خطي أعداد متعامدين هما المحور x والمحور y	المحاور	يتشكل بواسطة ثلاثة خطوط متعامدة هي المحور x والمحور y والمحور z
يتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل $(0, 0)$	نقطة التقاطع	تتقاطع في نقطة تسمى نقطة الأصل $(0, 0, 0)$
مستويان تقسم المستوى إلى أربع مناطق يسمى كل منها الربع .	شكلها	ثلاث مستويات تقسم الفضاء إلى ثماني مناطق يسمى كل منها الثمن .
تحديد وتعيين نقاط في المستوى .	يسمح هذا النظام بـ	تحديد وتعيين نقاط في الفضاء .
(x, y)	الإحداثيات	(x, y, z)
	التمثيل البياني	

الثمن

الشكل المجاور يمثل **الثمن** في الفضاء الثلاثي الأبعاد وهو الجزء الظاهر من الغرفة .



الثلاثي المرتب

وهو شكل كتابة النقطة في الفضاء (x, y, z) حيث أنها أعداد حقيقية .

مثال : $(2, 4, -6)$

تعيين نقطة في الفضاء

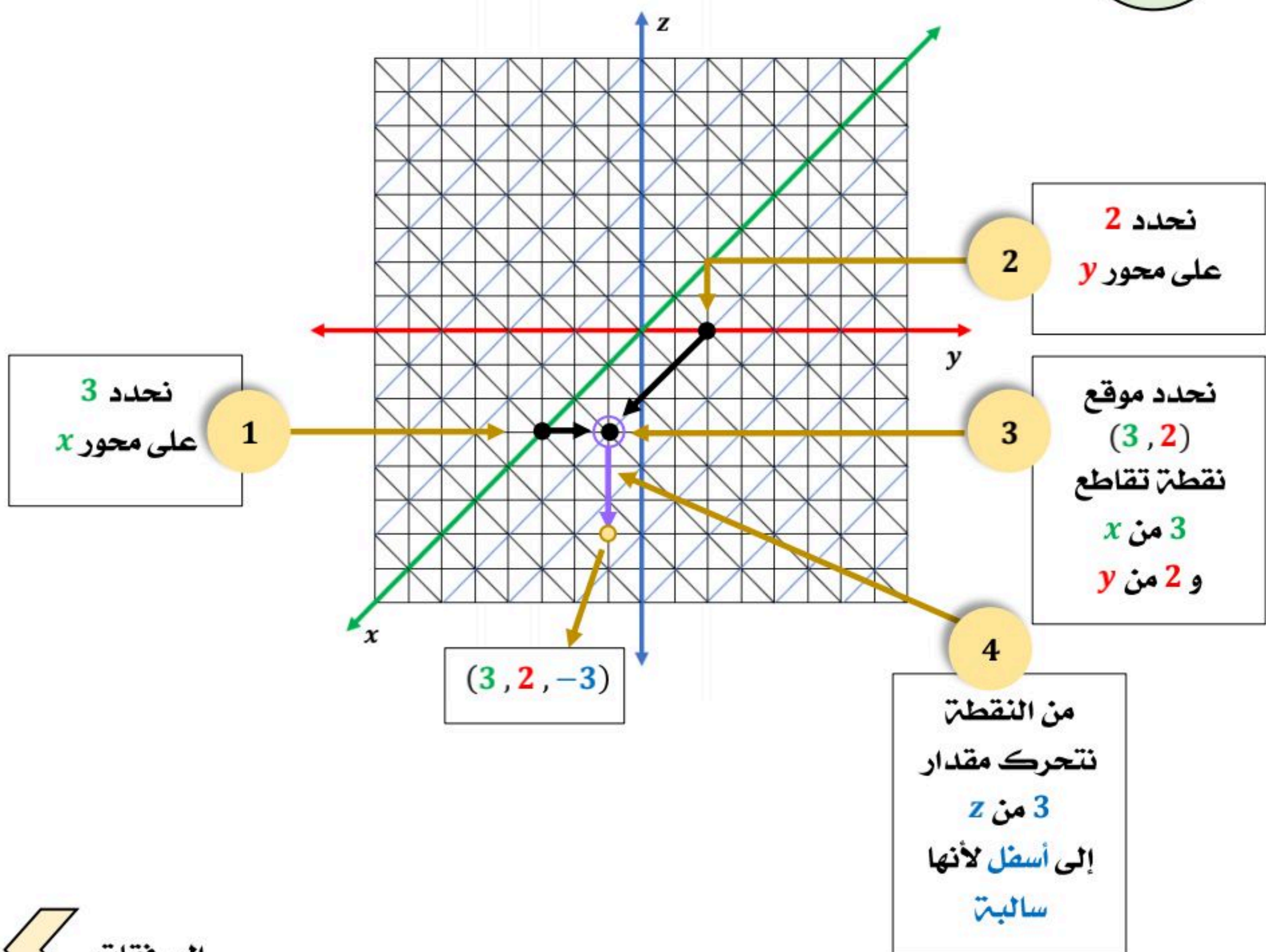
لتكن النقطة (x, y, z)

1 عين النقطة (x, y) في المستوى xy

2 تحرك لأعلى إذا كانت قيمة z موجبة أو إلى أسفل إذا كانت قيمة z سالبة
باتجاه موازي لمحور z

عين النقطة $(3, 2, -3)$ في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد :

مثال



المرفقات

المسافة بين نقطتين في الفضاء

يشبه قانون
المسافة بين نقطتين
في المستوى
الإحداثي

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

نقطة المنتصف في الفضاء

يشبه قانون
نقطة المنتصف
في المستوى
الإحداثي

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$$

نقطة المنتصف M $\overline{AB} \perp M$

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

المتجهات في الفضاء

تشبه المتجهات في
المستوى الإحداثي

المتجه في الوضع القياسي $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

المتجه الصفري $0 = \langle 0, 0, 0 \rangle$

متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية:

$$i = \langle 1, 0, 0 \rangle, j = \langle 0, 1, 0 \rangle, k = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

يمكن التعبير عن المتجه v على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة i, j, k :

$$v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

تعيين متجه في الفضاء

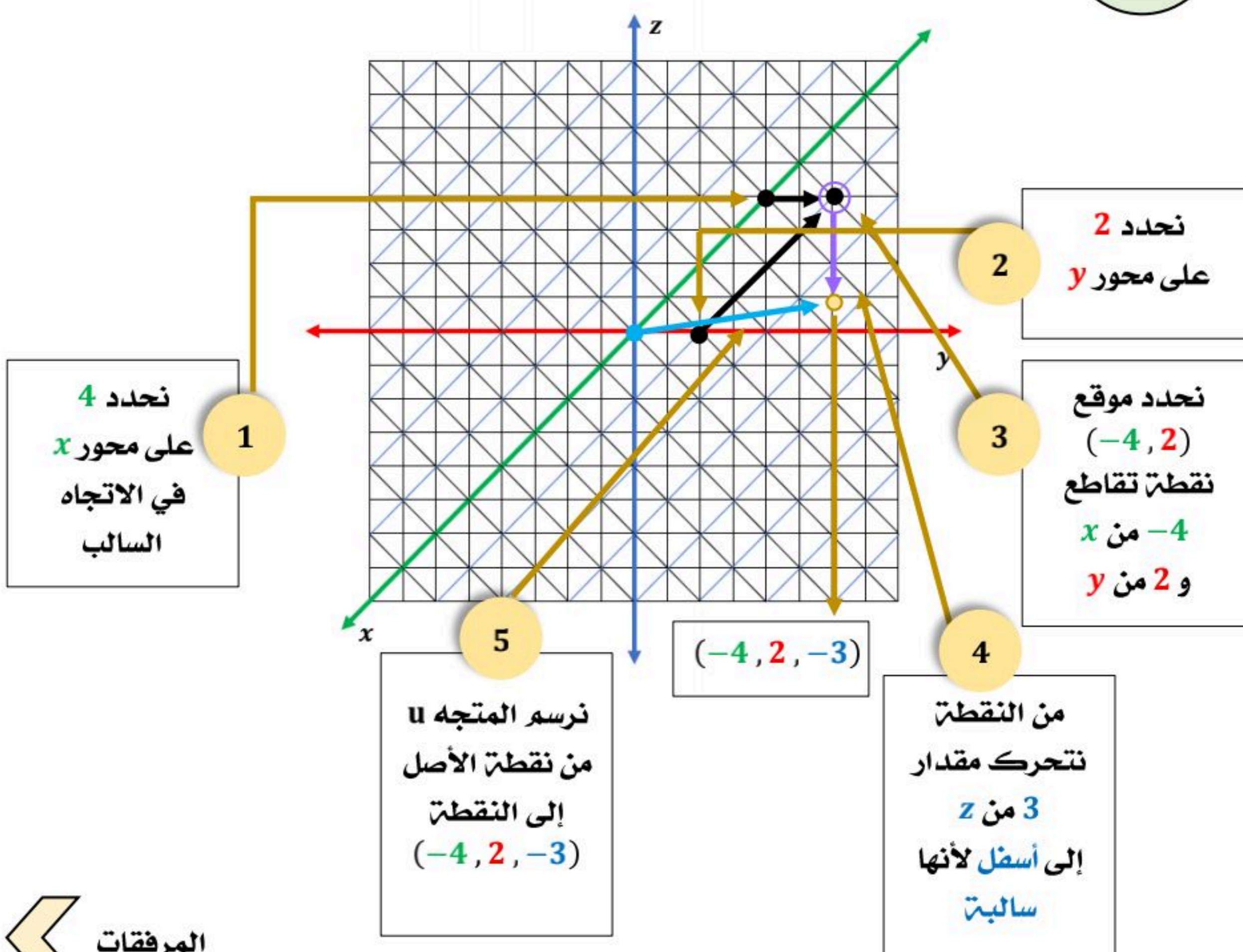
ليكن المتجه $v = \langle x, y, z \rangle$

1 عين النقطة (x, y, z) بالطريقة السابقة.

2 المتجه v بياناً وذلك بأن تكون نقطة الأصل هي نقطة البداية والنقطة (x, y, z) هي نقطة النهاية.

عين المتجه $u = \langle -4, 2, -3 \rangle$ في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد :

مثال



العمليات على المتجهات في الفضاء

إذا كان $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجهين و k عدد حقيقياً، فإن :

$$a + b = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle \quad \text{جمع متجهين}$$

$$a - b = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle \quad \text{طرح متجهين}$$

$$k a = \langle k a_1, k a_2, k a_3 \rangle \quad \text{ضرب متجه في عدد حقيقي}$$

خصائص العمليات على
المتجهات في الفضاء هي
الخصائص نفسها في
المستوى الإحداثي.

الصورة
الإحداثية
لمتجه في
الفضاء

الصورة الإحداثية لـ \overline{AB} الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2, z_2)$ هي:
 $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$

التعبير عن
المتجهات
في الفضاء
يشبه
المستوى
الإحداثي

طول
المتجه
في الفضاء

طول \overline{AB} الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2, z_2)$ هو:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

متجه
الوحدة
في الفضاء

متجه الوحدة u باتجاه \overline{AB} هو :

$$u = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|}$$

الضرب الداخلي في الفضاء

الضرب الداخلي للمتجهين $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

$$a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

النتيجة يكون عدداً وليس متجهاً

المتجهان غير متعامدان

إذا كان حاصل الضرب الداخلي

لا يساوي صفر

المتجهان متعامدان

إذا كان حاصل الضرب الداخلي

يساوي صفر

مثال

$$u = \langle 4, -2, -3 \rangle, v = \langle 1, 3, -2 \rangle$$

$$u \cdot v = 4(1) + (-2)(3) + (-3)(-2) = 4$$

$$u = \langle 3, -5, 4 \rangle, v = \langle 5, 7, 5 \rangle$$

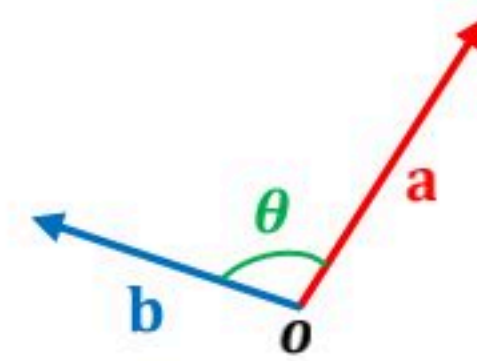
$$u \cdot v = 3(5) + (-5)(7) + 4(5) = 0$$

الزاوية بين المتجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين a, b فإن :

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$



أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u, v :

$$u = \langle -4, 2, 1 \rangle, v = \langle 4, 0, 3 \rangle$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{u \cdot v}{|u| |v|}$$

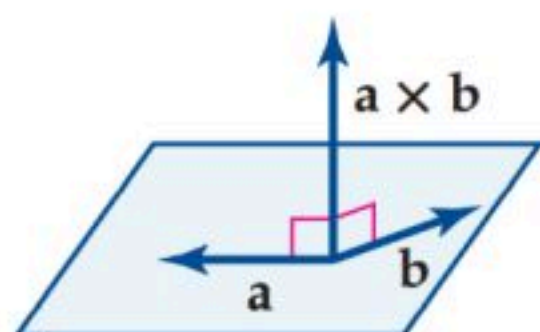
$$\theta = \cos^{-1} \frac{-4(4) + 2(0) + 1(3)}{\sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (1)^2} \sqrt{(4)^2 + (0)^2 + (3)^2}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-13}{\sqrt{21} \sqrt{25}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-13}{5\sqrt{21}} = 124.6^\circ$$

مثال

الضرب الاتجاهي



الضرب الاتجاهي لمتجهين a, b هو متجه وليس عدداً

ويرمز له بالرمز $a \times b$ (\times تقرأ cross)

ويكون المتجه الناتج عمودياً على المستوى الذي يحوي المتجهين a, b

يطبق الضرب الاتجاهي على المتجهات في النظام ثلاثي الأبعاد فقط.

الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان: $a = a_1i + a_2j + a_3k$, $b = b_1i + b_2j + b_3k$

فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين a, b هو المتجه:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

يكون الضرب الاتجاهي

$$u \times v$$

عمودياً على كلا من

المتجهين

$$u, v$$

إذا كان حاصل

الضرب الداخلي $u \cdot v$

مع كلا من المتجهين

يساوي صفراً.

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين u, v : $u = \langle 4, 2, -1 \rangle, v = \langle 5, 1, 4 \rangle$

مثال

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

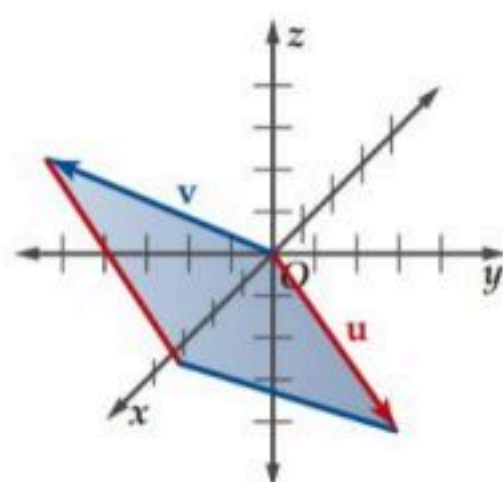
$$u \times v = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} k$$

$$u \times v = (2(4) - (-1)(1))i - (4(4) - (-1)(5))j + (4(1) - 2(5))k$$

$$u \times v = (8 + 1)i - (16 + 5)j + (4 - 10)k$$

$$u \times v = 9i - 21j - 6k$$

تطبيقات هندسية للضرب الاتجاهي



مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه u , v ضلعان متجاوران

هو **طول** $u \times v$ أي مقدار المتجه $|u \times v|$

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه :

$u = -6i - 2j + 3k$, $v = 4i + 3j + k$ ضلعان متجاوران.

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} k$$

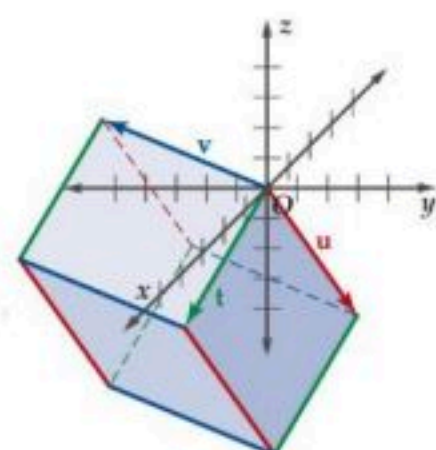
$$u \times v = -11i + 18j - 10k$$

$$|u \times v| = \sqrt{(-11)^2 + (18)^2 + (-10)^2}$$

$$|u \times v| = \sqrt{545} = 23.3$$

مساحة متوازي الأضلاع تساوي **23.3** وحدة مربعة

مثال



متوازي السطوح : هو مجسم ثلاثي الأبعاد في الفضاء ، له ستة أوجه ، كل منها على شكل متوازي أضلاع .

حجم متوازي السطوح : هو القيمة المطلقة للضرب القياسي الثلاثي .

إذا كان : $t = t_1i + t_2j + t_3k$, $u = u_1i + u_2j + u_3k$, $v = v_1i + v_2j + v_3k$

$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} : t, u, v \text{ للمتجهات الثلاثي}$$

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه :

$t = 2j - 5k$, $u = -6i - 2j + 3k$, $v = 4i + 3j + k$ أحرف متجاورة .

$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} (0) - \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} (2) + \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} (-5)$$

$$t \cdot (u \times v) = -10(0) + 18(2) + (-10)(-5)$$

$$t \cdot (u \times v) = 36 + 50 = 86$$

حجم متوازي السطوح يساوي **86** وحدة مكعبة

مثال