



# رياضيات 3

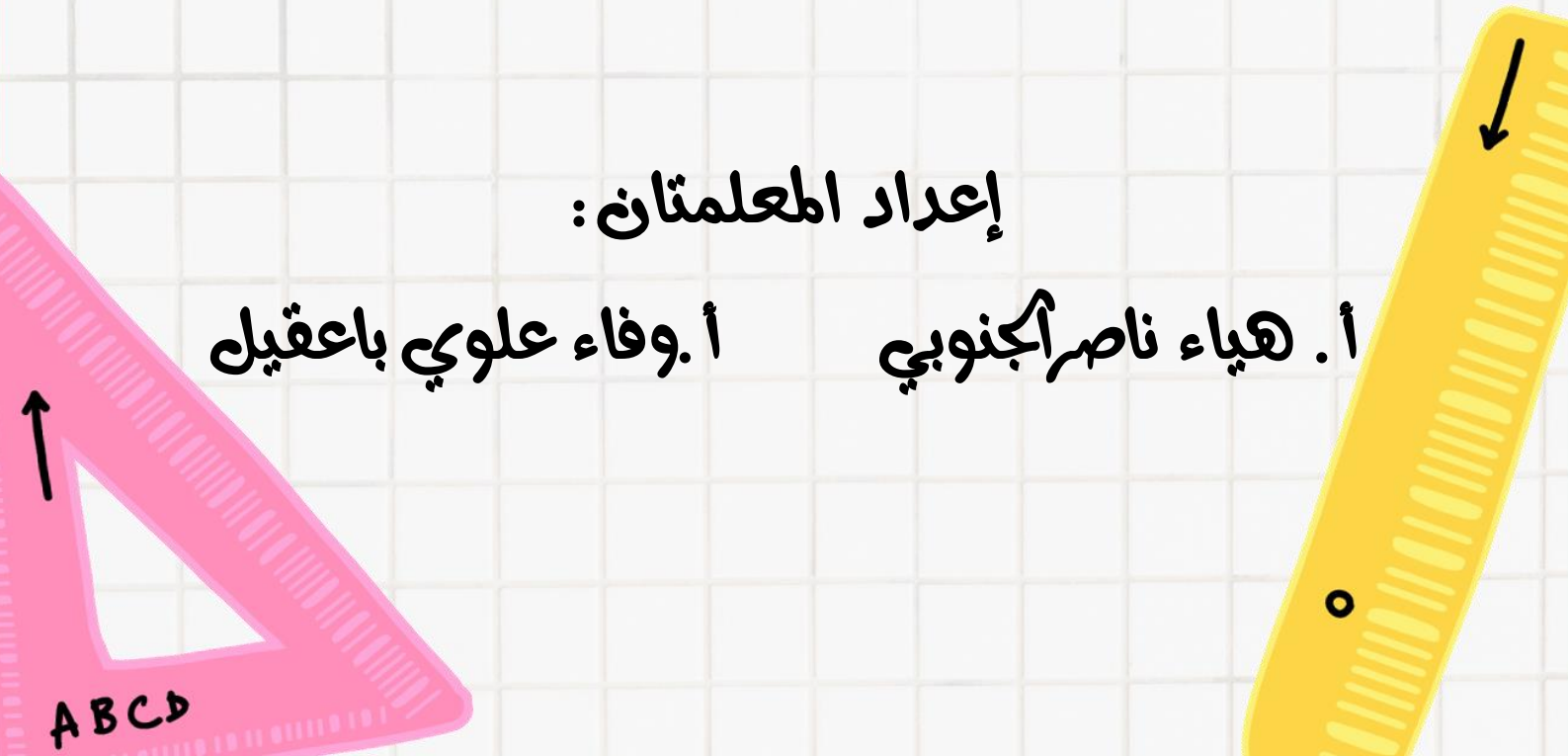
الفصل الدراسي الثاني

اسم الطالب/ة: .....

الصف: .....

إعداد المعلمتان:

أ. هياء ناصر أجنوبي      أ. وفاء علوي باعقيل





التوقيع

الملاحظات

الدرجة

التاريخ

م

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

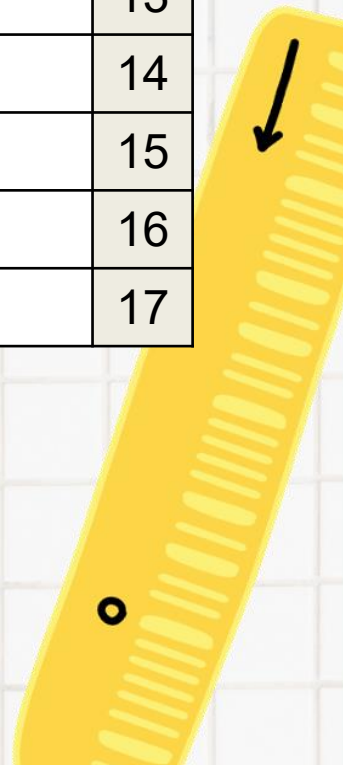
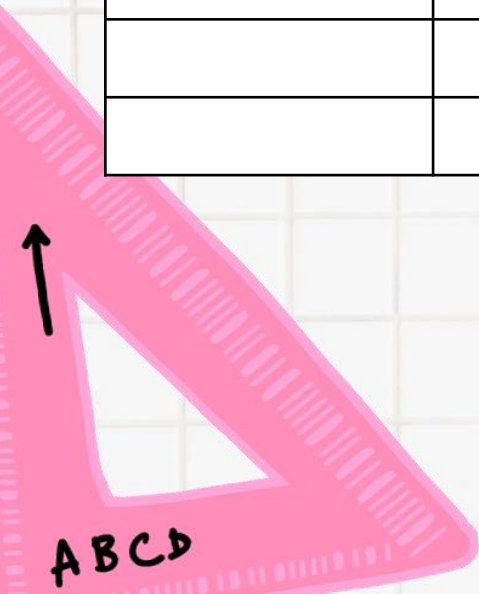
13

14

15

16

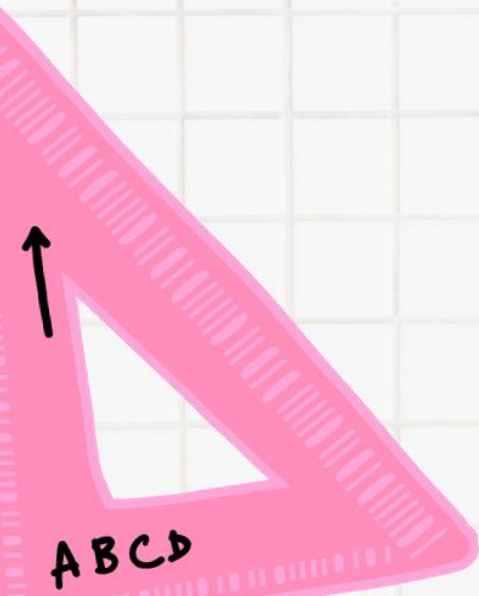
17





## الفصل الثالث المتطابقات والمعادلات المثلثية

- المتطابقات المثلثية
- إثبات صحة المتطابقات المثلثية
- المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما
- المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها
- حل المعادلات المثلثية



1 المتطابقات المثلثية الأساسية

تكون المعادلة **متطابقة** إذا تساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها  
**المتطابقة المثلثية** هي متطابقة تحوي دوال مثلثية  
 إذا وجدت مثالا مضادا يثبت خطأ المعادلة ، فالمعادلة حينئذ لا تكون متطابقة

المتطابقات النسبية..

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$$

متطابقات المقلوب..

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}, \csc \theta \neq 0$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$$

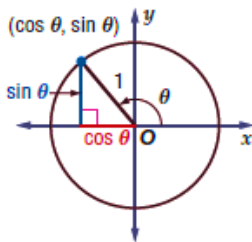
$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}, \sec \theta \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}, \cot \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, \tan \theta \neq 0$$

متطابقات فيثاغورس



حسب نظرية فيثاغورس  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

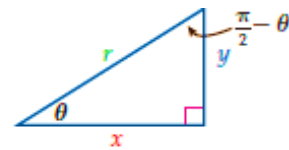
$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

متطابقات الزاويتين المتتامتين

$$\sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta$$

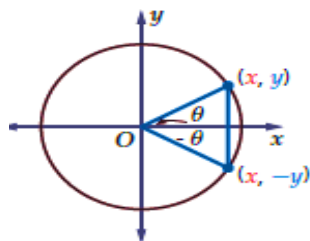
$$\tan \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cot \theta$$



$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \cot \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

متطابقات الدوال الفردية والزوجية



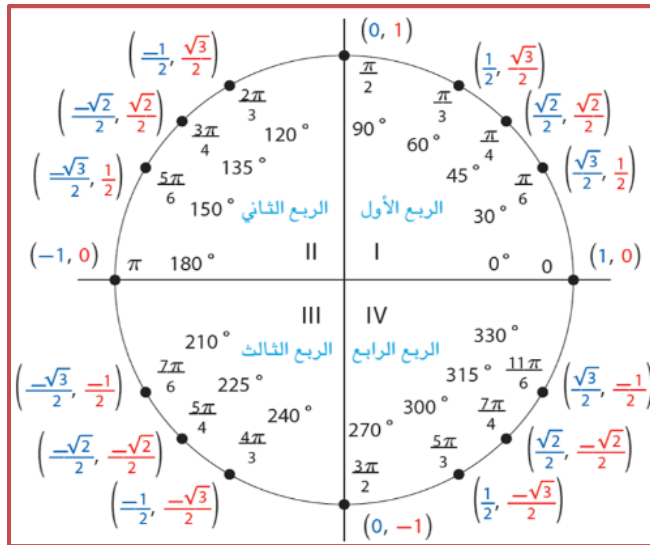
$$\begin{aligned} \sin \theta &= y & \sin(-\theta) &= -y \\ \cos \theta &= x & \cos(-\theta) &= x \end{aligned}$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

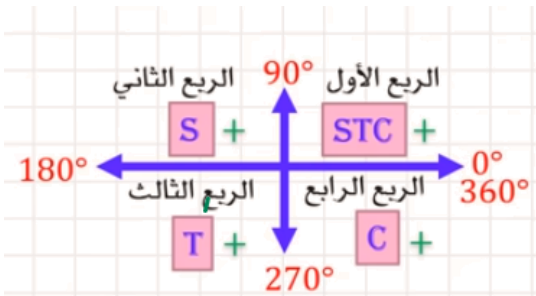
$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

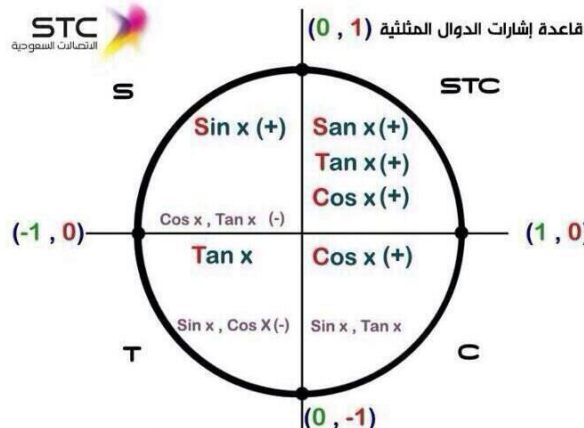
1 المتطابقات المثلثية الأساسية



360	270	180	90	0	60	45	30	
								sin
								cos



-	+	الدالة
3, 4	1, 2	sin θ
		csc θ
2, 3	1, 4	cos θ
		sec θ
2, 4	1, 3	tan θ
		cot θ



1 المتطابقات المثلثية الأساسية

تحقق من فهمك: ص 143 -



1B) أوجد القيمة الدقيقة لـ  $\sec \theta$  إذا كان  $\sin \theta = \frac{-2}{7}$ ,  $180^\circ < \theta < 270^\circ$

1A) أوجد القيمة الدقيقة لـ  $\sin \theta$  إذا كان  $\cos \theta = \frac{1}{3}$ ,  $270^\circ < \theta < 360^\circ$

تدرب: ص 145 -



8) أوجد القيمة الدقيقة لـ  $\cot \theta$  إذا كان  $\sec \theta = \frac{-9}{2}$ ,  $\sin \theta < 0$

1) أوجد القيمة الدقيقة لـ  $\tan \theta$  إذا كان  $\cot \theta = 2$ ,  $0^\circ < \theta < 90^\circ$

تبسيط العبارات المثلثية

2

هو إيجاد القيمة العددية للعبارة أو كتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة فقط, إن أمكن.

تحقق من فهمك: ص 144-



بسّط كل عبارة مما يأتي:

إرشادات للدراسة



عند تبسيط العبارات المثلثية يكون من الأسهل عادة أن تكتب حدود العبارة جميعها بدلالة  $\sin \theta$  و  $\cos \theta$

$$\frac{\sec \theta}{\sin \theta} (1 - \cos^2 \theta) \quad (2B)$$

$$\frac{\tan^2 \theta \csc^2 \theta - 1}{\sec^2 \theta} \quad (2A)$$

بسّط كل عبارة مما يأتي:

تدرب: ص 145-



$$\theta^2 - 2 \sin^2 \quad (17)$$

$$\tan \theta \cos^2 \theta \quad (9)$$

## إعادة كتابة الصيغ الرياضية:

3

تحقق من فهمك: ص 144-



3) تعلم أن مقدار العزم (T) يساوي حاصل ضرب القوة (F) في ذراعها، ويعطى بالمعادلة  $T = Fr \sin \theta$   
أعد كتابة المعادلة السابقة بدلالة (F)؟

تدرب: ص 145-



20) الشمس: ترتبط قدرة كل جسم على امتصاص الطالقة بعامل  $e$  يسمى قابلية الامتصاص للجسم. ويمكن حساب قابلية الامتصاص باستعمال العلاقة:  $e = \frac{W \sec \theta}{AS}$ ، حيث  $W$  معدل امتصاص جسم الإنسان للطاقة من الشمس، و  $S$  مقدار الطاقة المنبعثة من الشمس بالواط لكل متر مربع، و  $A$  المساحة السطحية المعرضة لأشعة الشمس، و  $\theta$  الزاوية بين أشعة الشمس والخط العمودي على الجسم.

(a) حل المعادلة بالنسبة لـ  $W$ .(b) أوجد  $W$  إذا كانت  $A = 0.75$ ,  $\theta = 40^\circ$ ,  $e = 0.80$ ,  $S = 1000W/m^2$ . (قرب إلى أقرب جزء من مئة)



32) **اكتشف الخطأ:** بسّط كل من علاء وسامي المقدار  $\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$  كما يأتي. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

**سامي**

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{1}$$

$$= \sin^2 \theta$$

**علاء**

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$= \tan^2 \theta + 1$$

$$= \sec^2 \theta$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

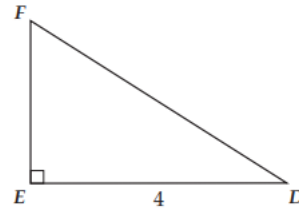
30) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارتين تكافئ كل منهما العبارة:  $\tan \theta \sin \theta$

.....

.....

.....

39) في الشكل أدناه، إذا كان  $\cos D = 0.8$ ، فما طول  $\overline{DF}$ ؟



3.2 C

5 A

10 D

4 B

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

40) إذا كان  $\sin x = m$  و  $0^\circ < x < 90^\circ$ ، فما قيمة  $\tan x$ ؟

$\frac{1}{m^2}$  A

$\frac{m \sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$  B

$\frac{1-m^2}{m}$  C

$\frac{m}{1-m^2}$  D

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الواجب:



A large rectangular area with a blue border, containing horizontal dotted lines for writing the answer.

## تحصيلي رياضيات

العبارة $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \times \tan \theta$ تكافئ....				1	
$\csc \theta$	(B)		$\tan \theta$		(A)
$\sin \theta \times \cos \theta$	(D)		$\cot \theta$		(C)

العبارة: $\sin \theta (1 - \cot \theta)$ تكافئ.....				2	
$\sin \theta - \cos \theta$	(B)		$\sin \theta \cos \theta$		(A)
$\sec \theta$	(D)		$\cos^2 \theta$		(C)

العبارة $\cot^2 \theta \sin^2 \theta$ تكافئ.....				3	
$\cos^2 \theta$	(B)		$\sin^2 \theta$		(A)
$\frac{\cos^4 \theta}{\cos^2 \theta}$	(D)		$\tan^2 \theta$		(C)

إذا كانت: $270^\circ < \theta < 360^\circ$ و $\cos \theta = \frac{1}{2}$ فأوجد $\sin \theta$				4	
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	(B)		$\frac{1}{2}$		(A)
$\frac{-1}{2}$	(D)		$\frac{-\sqrt{3}}{2}$		(C)

## إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

باستعمال المتطابقات المثلثية الأساسية هناك طريقتان للإثبات

تحويل طرفي المعادلة

في بعض الأحيان يكون من الأسهل  
أن تحول كل طرف في المتطابقة  
بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة.



تحويل أحد طرفي المعادلة

بسط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان  
متساويين وفي العادة يكون من الأسهل البدء  
بالطرف الأكثر تعقيدا

تحقق من فهمك : ص 147-


 (1) أثبت صحة المتطابقة،  $\cot^2 \theta - \cos^2 \theta = \cot^2 \theta \cos^2 \theta$ 

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أثبت صحة المتطابقات الآتية /

تدريب: ص 149-



$$\tan \theta = \frac{\sec \theta}{\csc \theta} \quad (7)$$

$$\cos^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^2 \theta = 1 \quad (1)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تحقق من فهمك : ص 148-



$$\tan^2\theta(\cot^2\theta - \cos^2\theta)$$

$\cos^2\theta (C)$	$\cot^2\theta(A)$
$\sin^2\theta (D)$	$\tan^2\theta(B)$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

تدرّب: ص 149-



$$\frac{\tan^2\theta+1}{\tan^2\theta}$$

$\cos^2\theta (C)$	$\sin^2\theta(A)$
$\csc^2\theta (D)$	$\tan^2\theta(B)$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### من الاقتراحات:



- ✓ بسط العبارة بالاستفادة من المتطابقات المثلثية الأساسية
- ✓ حلل أو اضرب كلا من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها
- ✓ اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب وجيب التمام فقط ثم بسط كل طرف قدر المستطاع
- ✓ لا تنفذ أي عملية ( جمع , طرح , ضرب , قسمة ) على طرفي المعادلة التي يطلب إثبات أنها متطابقة , لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات

تحقق من فهمك : ص 149-


 (1) أثبت صحة المتطابقة،  $csc^2\theta - cot^2\theta = cot\theta tan\theta$ 


أثبت صحة المتطابقات الآتية

تدرّب: ص 150-



$$csc\theta - 1 = \frac{cot^2\theta}{csc\theta + 1} \quad (18)$$


$$sec\theta csc\theta = tan\theta + cot\theta \quad (14)$$


بسط كلا من العبارات الآتية، لتحصل على الناتج (1) أو (-1)

$$cos(-\theta) sec\theta \quad (32)$$


$$cot(-\theta)tan(-\theta) \quad (26)$$


مهارات التفكير العليا: ص 151 -

44) **اكتشف المختلف:** حدّد المعادلة المختلفة عن المعادلات الثلاث الأخرى. وضح إجابتك.

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 2 \sin^2 \theta$$

تدرب على الاختبار: ص 151 -

55) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي لا يكافئ  $\cos \theta$  ، حيث  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  ؟

**A**  $\frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$

**B**  $\frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta}$

**C**  $\cot \theta \sin \theta$

**D**  $\tan \theta \csc \theta$

56) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** أثبت أن المعادلة التالية تمثّل متطابقة:  

$$\sin^3 \theta \cos \theta + \cos^3 \theta \sin \theta = \sin \theta \cos \theta$$

الواجب:



A large rectangular area with a blue border, containing numerous horizontal dotted lines for writing the answer.



## تحصيلي رياضيات

العبارة $csc^2\theta - cot^2\theta$ تكافئ....			
$1 - \sin^2\theta$	(B)	$cos^2\theta + \sin^2\theta$	(A)
$cos^2\theta - \sin^2\theta$	(D)	$1 - cos^2\theta$	(C)

العبارة: $(1 - \sin^2\theta)cos^2\theta$ تكافئ.....			
$cos^4\theta$	(B)	$\sin^4\theta$	(A)
$cot^2\theta$	(D)	$\tan^2\theta$	(C)

العبارة $(1 - cot^2\theta)\sin^2\theta$ : تكافئ.....			
$cos^2\theta \sin^2\theta$	(B)	$\sin^2\theta - cos^2\theta$	(A)
$sec\theta$	(D)	$\tan^2\theta$	(C)

العبارة: $cot^2\theta(\tan^2\theta - \sin^2\theta)$ تكافئ.....			
$cos^2\theta$	(B)	$\sin^2\theta$	(A)
$-\sin^2\theta$	(D)	$cos\theta$	(C)

العبارة: $cot^2\theta(\tan^2\theta + \sin^2\theta)$ تكافئ.....			
$1 + cos^2\theta$	(B)	$1 + \sin^2\theta$	(A)
$\sin^2\theta$	(D)	$cos^2\theta$	(C)

قيمة المحددة $\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}$ تساوي.....			
1	(B)	0	(A)
$2\sin^2x$	(D)	$\cos 2x$	(C)

## متطابقات الفرق

$$\begin{aligned}\sin(A - B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \\ \cos(A - B) &= \cos A \sin B + \sin A \cos B \\ \tan(A - B) &= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}\end{aligned}$$



## متطابقات المجموع

$$\begin{aligned}\sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \cos(A + B) &= \cos A \sin B - \sin A \cos B \\ \tan(A + B) &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}\end{aligned}$$

دون استخدام الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

تحقق من فهمك : ص 152-



$$\cos(-15^\circ) \quad (1B)$$

$$\sin 15^\circ \quad (1A)$$

دون استخدام الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

تدرب: ص 154-



$$\tan 195^\circ \quad (8)$$

$$\cos 165^\circ \quad (1)$$

تحقق من فهمك : ص 153 -



8) إذا كانت شدة التيار  $c$  تعطى بالصيغة  $c = 2 \sin 285^\circ t$  فأجب عما يأتي :  
2A) أعد كتابة الصيغة ، باستعمال الفرق بين زاويتين

2B) استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين ، لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

تدرب: ص 154 -



8) يمر تيار كهربائي متردد في دائرة كهربائية ، وتعطى شدة هذا التيار  $c$  بالأمبير بعد  $t$  ثانية بالصيغة  $c = 2 \sin 120^\circ t$  أعد كتابة الصيغة ، باستعمال الفرق بين زاويتين

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين ، لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.



تستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما أيضا في إثبات صحة المتطابقات.

تحقق من فهمك: ص 154 -



$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} \quad (3B)$$

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \quad (3A)$$

تدرب: ص 154 -



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta \quad (14)$$

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta \quad (13)$$

$$\frac{\sin A + \tan \theta \cos A}{\cos A - \tan \theta \sin A} = \tan(A + \theta) \quad (23) \text{ حيث } \theta, A \text{ زاويتان حادتان}$$

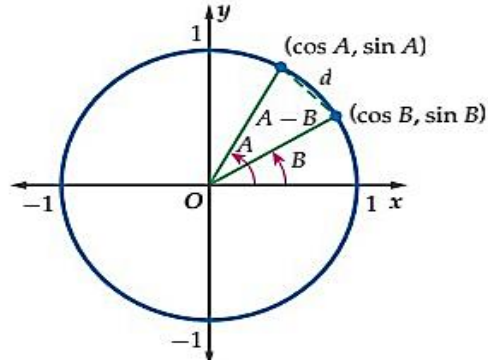
(29) تبرير: بسط العبارة الآتية، دون إيجاد مفكوك المجموع أو الفرق.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$$

(31) برهان: الشكل أدناه، يُبين الزاويتين  $A, B$  في الوضع القياسي

في دائرة الوحدة. استعمل قانون المسافة؛ لإيجاد قيمة  $d$ ، حيث

$$(x_1, y_1) = (\cos B, \sin B), (x_2, y_2) = (\cos A, \sin A)$$



تدرب على الاختبار: ص 155 -

(43)

ما القيمة الدقيقة للعبارة:

$$\sin(60^\circ + \theta) \cos \theta - \cos(60^\circ + \theta) \sin \theta$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{C}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{A}$$

$$\sqrt{3} \quad \text{D}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{B}$$

(44) سؤال ذو إجابة قصيرة: إذا كان  $\cos \theta + 0.3 = 0$

$$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

فأوجد القيمة الدقيقة لـ  $\cot \theta$

الواجب:

A large rectangular area with a blue border, containing numerous horizontal dotted lines for writing the answer.

تحصيلي رياضيات

قيمة $\cos(30^\circ - \theta) \cos(\theta) = \sin(30^\circ - \theta) \sin(\theta)$ تساوي ....				1
$-\frac{1}{2}$	(B)	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	(A)	
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	(D)	$\frac{1}{2}$	(C)	

العبارة: $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta$ تكافئ.....				2
$\sin 4\theta$	(B)	$\cos 4\theta$	(A)	
$\sin 2\theta$	(D)	$\cos 2\theta$	(C)	

القيمة الدقيقة لـ $\sin 15^\circ$ هي :				3
$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$	(B)	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	(A)	
$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	(D)	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$	(C)	

القيمة الدقيقة لـ $\cos 45^\circ \cos 15^\circ + \sin 45^\circ \sin 15^\circ$ هي :				4
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	(B)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	(A)	
1	(D)	$\frac{1}{2}$	(C)	

قيمة العبارة: $\sin 15^\circ \cos 45^\circ + \cos 15^\circ \sin 45^\circ$ هي :				5
$\frac{1}{2}$	(B)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	(A)	
$-\frac{1}{2}$	(D)	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	(C)	



## المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

1

## متطابقات ضعف الزاوية

 المتطابقات الآتية صحيحة لجميع قيم  $\theta$ 

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \cos 2\theta &= 2\cos^2 \theta - 1 \\ \cos 2\theta &= 1 - 2\sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

تحقق من فهمك : ص 157 -


 (1) أوجد القيمة الدقيقة لـ  $\sin 2\theta$  إذا كان  $\cos \theta = \frac{-1}{3}$ ,  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 

 أوجد القيمة الدقيقة لكل من إذا كان  $\cos \theta = \frac{-1}{3}$ ,  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 

تحقق من فهمك : ص 158 -


 $\tan 2\theta$  (2B)

 $\cos 2\theta$  (2A)





دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل من  $\sin 2\theta$ ,  $\cos 2\theta$

$$\sin \theta = \frac{1}{4}, 0^\circ < \theta < 90^\circ (1)$$

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

3



متطابقات نصف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لجميع قيم  $\theta$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

تحقق من فهمك: ص 159-



(3) أوجد القيمة الدقيقة لـ  $\sin \frac{\theta}{2}$  إذا كان  $\sin \theta = \frac{2}{3}$  في الربع الثاني

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لكل من  $\sin \frac{\theta}{2}$  ,  $\cos \frac{\theta}{2}$

تدرب: ص 161 -



$$\cos \theta = \frac{3}{5}, 270^\circ < \theta < 360^\circ \quad (3)$$

التبسيط باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

4

تحقق من فهمك : ص 160 -



يعطى تسارع الجاذبية الأرضية عند مستوى سطح البحر (بالسنتمتر لكل ثانية تربيع) تقريبا بالصيغة:  
 $g = 978 + 5.17 \sin^2 L - 0.014 \sin L \cos L$  حيث  $L$  تمثل زاوية دائرة العرض  
 (4A) بسط هذه العلاقة مستعملا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

(4B) استعمل الصيغة المبسطة التي أوجدتها في الفرع 4A , واحسب قيمة  $g$  عندما  $L=45^\circ$



19) يمر تيار متردد في دائرة كهربائية، إذا كانت شدة التيار الكهربائي  $I$  بالأمبير عند الزمن  $t$  ثانية هي  $I_0 \sin t\theta$ ، فإن القدرة  $P$  المرتبطة بالمقاومة  $R$  تعطى بالصيغة:  $P = I_0^2 R \sin^2 t\theta$  عبر عن القدرة بدلالة  $\cos 2\theta$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها  
في إثبات صحة المتطابقات أيضا.

إثبات صحة المتطابقة

5

تحقق من فهمك: ص 160 -



(5) أثبت صحة المتطابقة  $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



(15) أثبت صحة المتطابقة  $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

27) **اكتشف الخطأ:** يحاول سعيد وسلمان حساب القيمة الدقيقة لـ:  $\sin 15^\circ$ . هل إجابة أيّ منهما صحيحة؟ برّر إجابتك.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**سعيد**

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\sin(45 - 30) = \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{4}$$

**سلمان**

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\sin \frac{30}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}}$$

$$= 0.5$$

تدرب على الاختبار: ص 162 -

43) أوجد القيمة الدقيقة لـ  $\tan \frac{\theta}{2}$  إذا كان  $0 < \theta < 90^\circ$ ;  $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

A  $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$       C  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B  $\sqrt{3} - 2$       D  $\sqrt{3}$

44) معادلة الدالة الممثلة بيانياً في الشكل أدناه هي: .....

.....

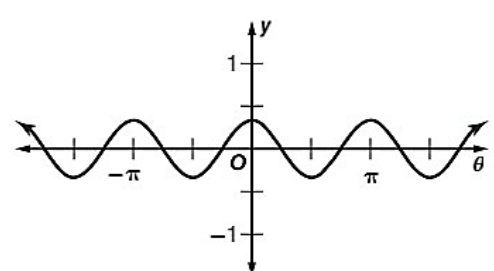
.....

.....

.....

.....

.....



A  $y = 3 \cos 2\theta$       C  $y = 3 \cos \frac{1}{2} \theta$

B  $y = \frac{1}{3} \cos 2\theta$       D  $y = \frac{1}{3} \cos \frac{1}{2} \theta$

الواجب:



A large rectangular area with a blue border, containing horizontal dotted lines for writing the answer.

## تحصيلي رياضيات

إذا علمت أن: $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ و $\tan \theta = 0$ فإن القيمة الدقيقة لـ $\tan 2\theta$ تساوي ...			
1	(B)		(A) 0
2	(D)		(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

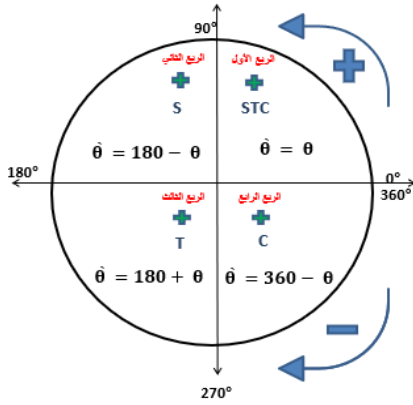
إذا علمنا أن: $0^\circ < \theta < 90^\circ$ و $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ، فإن قيمة $\cos \frac{\theta}{2}$ تساوي ...			
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	(B)		(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3}{4}$	(D)		(C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

إذا علمت أن: $270^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ و $\cos \theta = \frac{3}{5}$ فإن قيمة $\cos 2\theta$ تساوي ...			
$-\frac{7}{25}$	(B)		(A) $-\frac{24}{7}$
$-\frac{24}{25}$	(D)		(C) $\frac{7}{25}$

إذا علمت أن: $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ و $\sin \theta = \frac{3}{5}$ فإن قيمة $\sin 2\theta$ تساوي ...			
$-\frac{7}{25}$	(B)		(A) $-\frac{24}{7}$
$-\frac{24}{25}$	(D)		(C) $\frac{7}{25}$

إذا علمنا أن: $0^\circ < \theta < 90^\circ$ و $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ، فإن قيمة $\sin \frac{\theta}{2}$ تساوي ...			
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	(B)		(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{1}{4}$	(D)		(C) $\frac{1}{2}$

الحصول على قيم محددة للمتغير تكون عندها المعادلة صحيحة



تحقق من فهمك : ص 165 -



1B. حل المعادلة

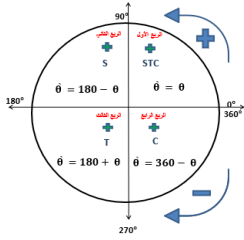
$$4\sin^2 \theta + 4\cos^2 \theta - 8 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

، إذا كانت

1A. حل المعادلة  $\cos x \sin x = 3 \cos x$

، إذا كانت  $0 \leq x \leq 2\pi$



(1) حل المعادلة  $\cos^2 \theta + 2\cos \theta + 1 = 0$ . إذا كانت  $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

2 معادلات مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول



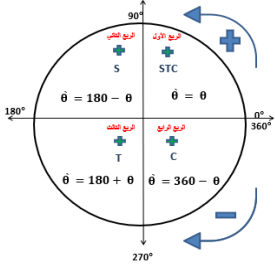
التعبير عن الحلول بوصفها مضاعفات: العبارة  $\pi + 2k\pi$  هي  $\pi$  مضافا لها مضاعفات  $2\pi$ ، ولذلك ليس من الضروري سرد جميع الحلول

تحقق من فهمك: ص 165 -



(2A) حل المعادلة:  $4 \sin x = 2 \sin x + \sqrt{2}$





(2B) حل المعادلة :  $2 \sin \theta = -1$  ، لقيم  $\theta$  جميعها إذا كان قياس  $\theta$  بالراديان

تدريب: ص 168 -



(2) حل المعادلة  $\cos^2 \theta + \cos \theta = 1$ ، إذا كانت  $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$



3 ( كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة , ليكون ارتفاع مقعدك 41 مترا فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟



13 ( الليل والنهار: إذا كان عدد ساعات النهار في إحدى المدن هو  $d$  ، ويمكن تمثيلها بالمعادلة  $d = 3\sin\frac{2\pi}{365}t + 12$  حيث  $d$  عدد الأيام بعد 21 مارس ، فأجب عما يأتي :

(a) في أي يوم سيكون عدد ساعات النهار في المدينة  $10\frac{1}{2}h$  تماما؟

(b) باستعمال النتيجة في الفرع ، ما أيام السنة التي يكون فيها عدد ساعات النهار  $10\frac{1}{2}$  ساعات على الأقل إذا علمت أن أطول نهار في السنة يحدث تقريبا يوم 22 يونيو؟ فسراجابتك.

## 4 حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيله

تحقق من فهمك : ص 166-

4) حل المعادلة  $\cos^2 \theta + 3 = 4 - \sin^2 \theta$ 

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تدرب: ص 168-

15) حل المعادلة :  $\sin 2\theta - \cos \theta = 0$  ، لجميع قيم  $\theta$  إذا كان قياس  $\theta$  بالدرجات

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 5 حل معادلات مثلثية باستخدام المتطابقات

تحقق من فهمك : ص 167-

5A) حل المعادلة لقيم  $\theta$  جميعها ، إذا كان قياس  $\theta$  بالدرجات  $\sin \theta \cot \theta - \cos^2 \theta = 0$ 

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(5B) حل المعادلة لقيم  $\theta$  جميعها ، إذا كان قياس  $\theta$  بالدرجات  $\frac{\cos \theta}{\cot \theta} + 2 \sin^2 \theta = 0$

تدريب: ص 168 -



(14) حل المعادلة لقيم  $\theta$  جميعها ، إذا كان قياس  $\theta$  بالدرجات:  $\sin^2 2\theta + \cos^2 \theta = 0$

مهارات التفكير العليا: ص 169-

 (31) **اكتشف الخطأ:** حلت كل من هلا وليلى المعادلة

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin \theta \quad , \quad 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ . \text{ أيّ منهما كانت}$$

إجابتها صحيحة؟ برّر إجابتك.

**ليلى**

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin \theta$$

$$-\sin \theta = -\sin \theta$$

$$2 \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta = 0$$

$$\theta = 90^\circ , 270^\circ$$

**هلا**

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin \theta$$

$$\frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta}$$

$$2 \cos \theta = 1$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^\circ , 300^\circ$$

تدرب على الاختبار: ص 162-

 (47) أي مما يأتي ليس حلاً للمعادلة  $\sin \theta + \cos \theta \tan^2 \theta = 0$  ؟

$$\frac{3\pi}{4} \quad \mathbf{D} \quad 2\pi \quad \mathbf{C} \quad \frac{7\pi}{4} \quad \mathbf{B} \quad \frac{5\pi}{2} \quad \mathbf{A}$$

 (48) ما حل المعادلة  $\csc x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$  ، حيث  $0^\circ < x < 360^\circ$  ؟

$$210^\circ \text{ أو } 330^\circ \quad \mathbf{C} \quad 30^\circ \text{ أو } 150^\circ \quad \mathbf{A}$$

$$240^\circ \text{ أو } 300^\circ \quad \mathbf{D} \quad 60^\circ \text{ أو } 120^\circ \quad \mathbf{B}$$

الواجب:



A large rectangular area with a blue border, containing numerous horizontal dotted lines for writing the answer.

## تحصيلي رياضيات

حل المعادلة: $\sin \theta = \frac{1}{2}$ , $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ هو ...				1
120° أو 45°	(B)	60°	(A)	
150° أو 30°	(D)	120° أو 60°	(C)	

حل المعادلة: $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ هو ...				2
210° أو 30°	(B)	30°	(A)	
لا يوجد لها حل	(D)	210° أو 150°	(C)	

حل المعادلة: $3 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta = 0$ , $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ هو ...				3
90°	(B)	30°	(A)	
لا يوجد لها حل	(D)	330° أو 30°	(C)	

أي التالي ليس حلالاً للمعادلة: $\sin \theta + \cos \theta \tan^2 \theta = 0$ ؟				4
$\frac{7\pi}{4}$	(B)	$\frac{5\pi}{2}$	(A)	
$\frac{3\pi}{4}$	(D)	$2\pi$	(C)	

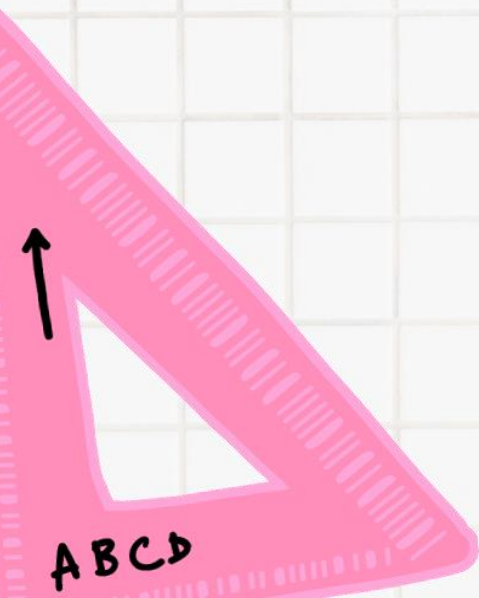
حل المعادلة: $\tan \theta = -1$ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$ هو ...				5
$\frac{3\pi}{2}$	(B)	$\frac{7\pi}{4}$	(A)	
$\frac{\pi}{4}$	(D)	$\frac{5\pi}{4}$	(C)	

إذا كان $\sec \theta + 2 = 0$ حيث $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ فإن $\theta = \dots$				6
90°	(B)	60°	(A)	
240°	(D)	120°	(C)	



## الفصل الرابع القطوع المخروطية

- ❖ القطوع المكافئة
- ❖ القطوع الناقصة والدوائر
- ❖ القطوع الزائدة
- ❖ تحديد أنواع القطوع المخروطية







## الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ:

القطع المكافئ المفتوح أفقيا

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

القطع المكافئ المفتوح رأسيا

$$(x - h)^2 = 4c(y - k)$$

## خصائص القطع المكافئ:

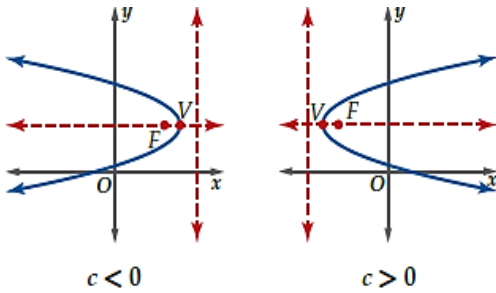
الاتجاه / المنحنى مفتوح أفقيا

 الرأس /  $(h, k)$ 

 البؤرة /  $(h + c, k)$ 

 معادلة محور التماثل /  $y = k$ 

 معادلة الدليل /  $x = h - c$ 

 طول الوتر البؤري /  $|4c|$ 


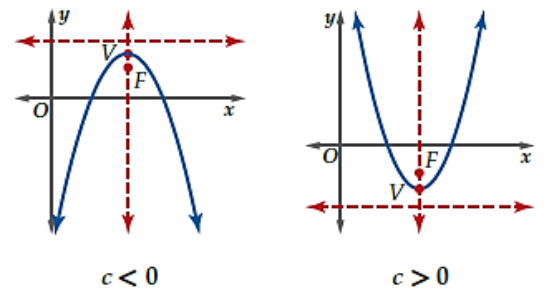
الاتجاه / المنحنى مفتوح رأسيا

 الرأس /  $(h, k)$ 

 البؤرة /  $(h, k + c)$ 

 معادلة محور التماثل /  $x = h$ 

 معادلة الدليل /  $y = k - c$ 

 طول الوتر البؤري /  $|4c|$ 


## اتجاه القطع المكافئ:

يكون اتجاه القطع المكافئ الذي محور تماثله مواز لأحد محوري الإحداثيات:

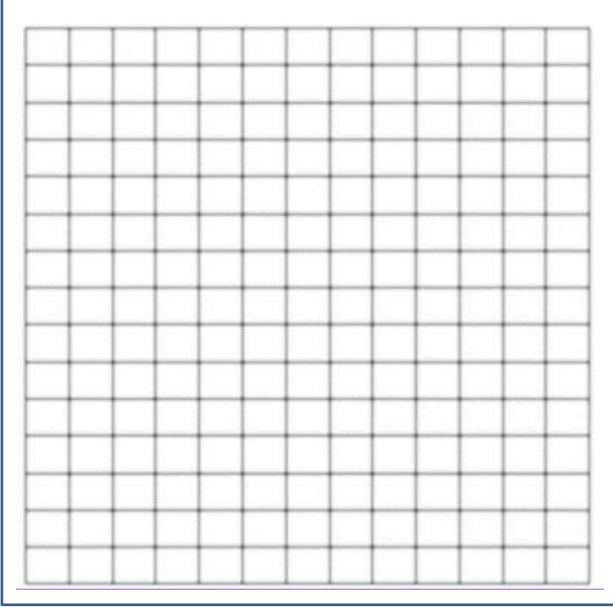
- ✓ مفتوحا إلى أعلى إذا كان الحد التربيعي هو  $x$ , وكانت  $c \geq 0$ .
- ✓ مفتوحا إلى أسفل إذا كان الحد التربيعي هو  $x$ , وكانت  $c < 0$ .
- ✓ مفتوحا إلى اليمين إذا كان الحد التربيعي هو  $y$ , وكانت  $c > 0$ .
- ✓ مفتوحا إلى الأسفل إذا كان الحد التربيعي هو  $y$ , وكانت  $c < 0$ .



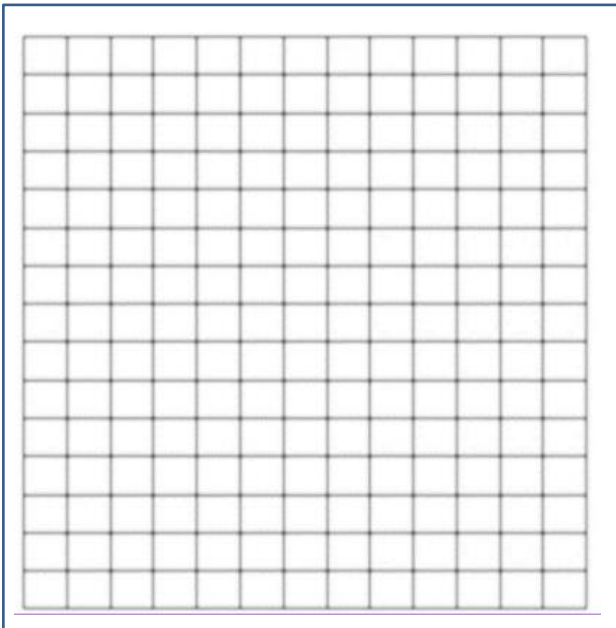
تحديد خصائص القطع المكافئ وتمثيل منحناه بيانياً:

1

 تحقق من فهمك: ص 180- (1A) حدد خصائص القطع المكافئ ثم مثله بيانياً:  $8(y + 3) = (x - 4)^2$ 

 **$c =$** 
 **$k =$** 
 **$h =$** 


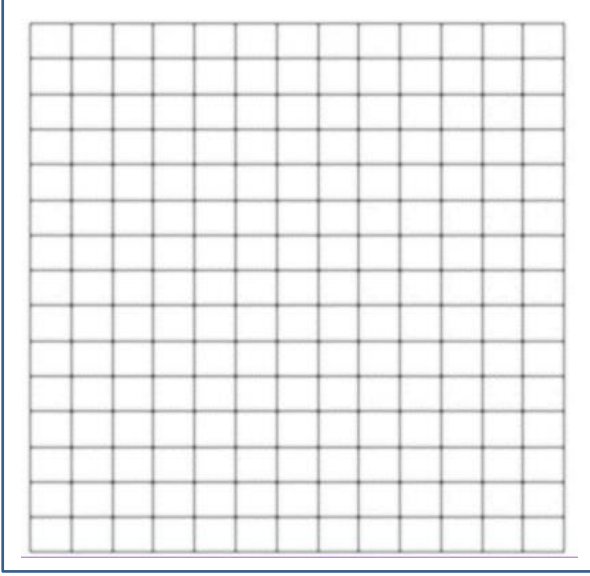
الخصائص	
	الإتجاه
	الرأس
	البؤرة
	معادلة محور التماثل
	معادلة الدليل
	طول الوتر البؤري

 (1B) حدد خصائص القطع المكافئ ثم مثله بيانياً:  $2(x + 6) = (y + 1)^2$ 
 **$c =$** 
 **$k =$** 
 **$h =$** 


الخصائص	
	الإتجاه
	الرأس
	البؤرة
	معادلة محور التماثل
	معادلة الدليل
	طول الوتر البؤري

(1) حدد خصائص القطع المكافئ ثم مثله بيانياً:  $(x - 3)^2 = 12(y - 7)^2$ 

تدرّب: ص 184-


**c =**
**k =**
**h =**


الخصائص	
	الإتجاه
	الرأس
	البؤرة
	معادلة محور التماثل
	معادلة الدليل
	طول الوتر البؤري


 لتحديد خصائص القطع المكافئ نعيد ترتيب المعادلة لتبسيطها، وقد تستعمل في بعض الحالات مهارات رياضية معينة مثل **إكمال المربع**

خصائص القطع المكافئ:

2

تحقق من فهمك: ص 180-


 (2) عد إلى فقرة لماذا؟ في بداية الدرس . افترض أنه يمكن تمثيل القطع المكافئ الظاهر في الصورة باستعمال المعادلة  $x^2 = 44.8(y - 6)$  , حيث  $-5 \leq x \leq 5$  إذا كانت  $x$  ,  $y$  بالأقدام , فإين تقع آلة التصوير بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟

تدرّب: ص 184-


 (7) صمم بدرلوح تزلج مقطعه العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته  $x^2 = 2(y - 2)$  حيث  $x$  ,  $y$  بالأقدام , احسب المسافة بين بؤرة القطع المكافئ ودليله؟

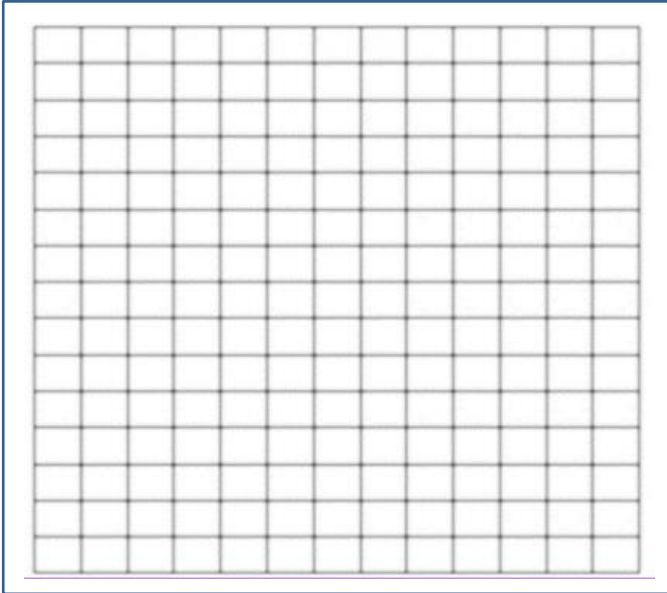
## 3 كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ  
ثم حدد خصائصه ومثل منحناه بيانيا

تحقق من فهمك : ص 180-



$$x^2 - 4y + 3 = 7 \quad (3A)$$

 $c =$ 
 $k =$ 
 $h =$ 


## الخصائص

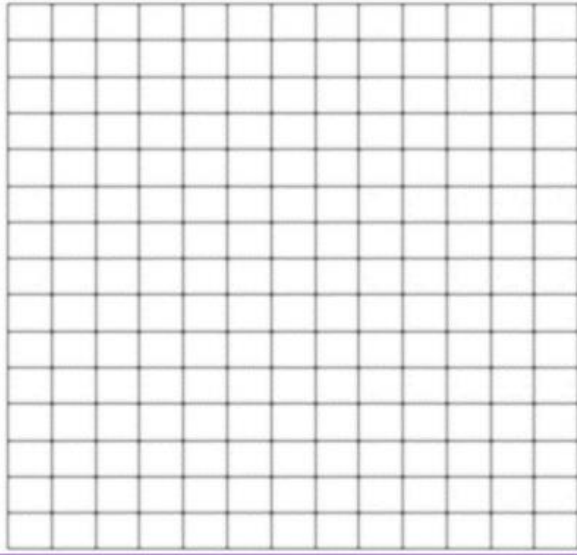
الخصائص	
	الإتجاه
	الرأس
	البؤرة
	معادلة محور التماثل
	معادلة الدليل
	طول الوتر البؤري

$$3y^2 + 6y + 15 = 12x \quad (3B)$$

$c =$

$k =$

$h =$



الخصائص	
	الإتجاه
	الرأس
	البؤرة
	معادلة محور التماثل
	معادلة الدليل
	طول الوتر البؤري

تدرب: ص 184 -



$$3x^2 + 72 = -72y \quad (11)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

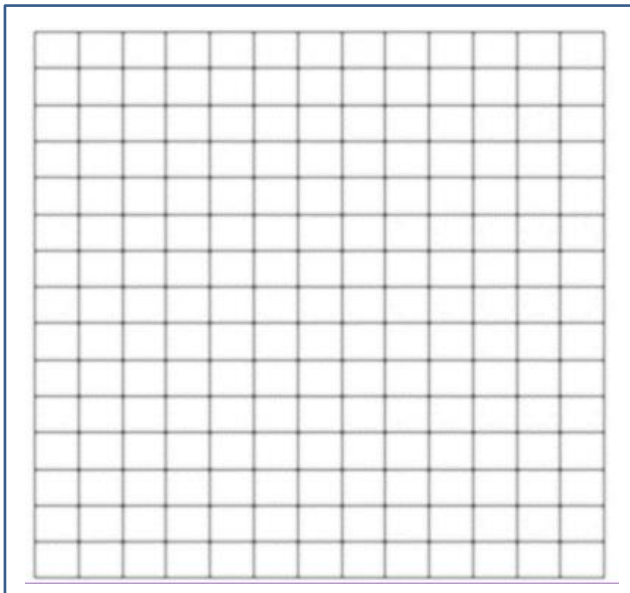
.....

.....

$c =$

$k =$

$h =$



الخصائص	
	الإتجاه
	الرأس
	البؤرة
	معادلة محور التماثل
	معادلة الدليل
	طول الوتر البؤري

كتابة معادلات القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه:

### الاتجاه:

إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي  $x$  ، فإن منحنى القطع المكافئ يكون مفتوحاً إلى أعلى أو إلى أسفل .  
أما إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي  $y$  فإن المنحنى يكون مفتوحاً إلى اليمن أو إلى اليسار .



### الدليل:

يقع الدليل في الاتجاه المعاكس لاتجاه منحنى القطع المكافئ.

تحقق من فهمك : ص 182 -

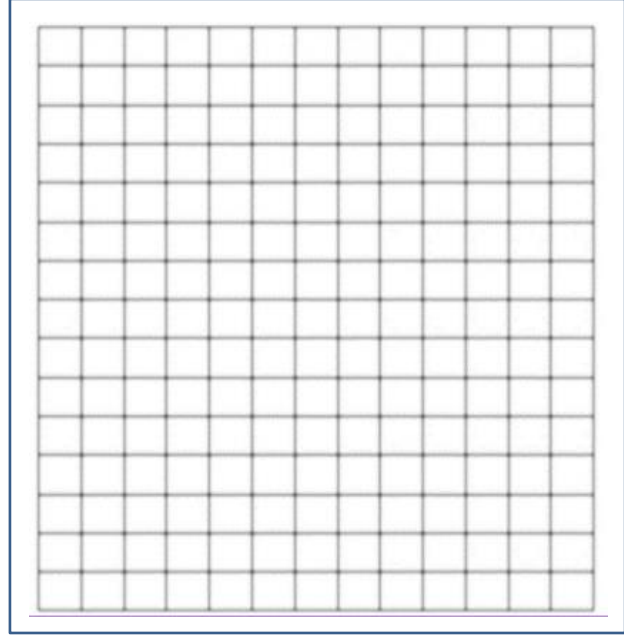


اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي ثم مثل منحناه بيانياً

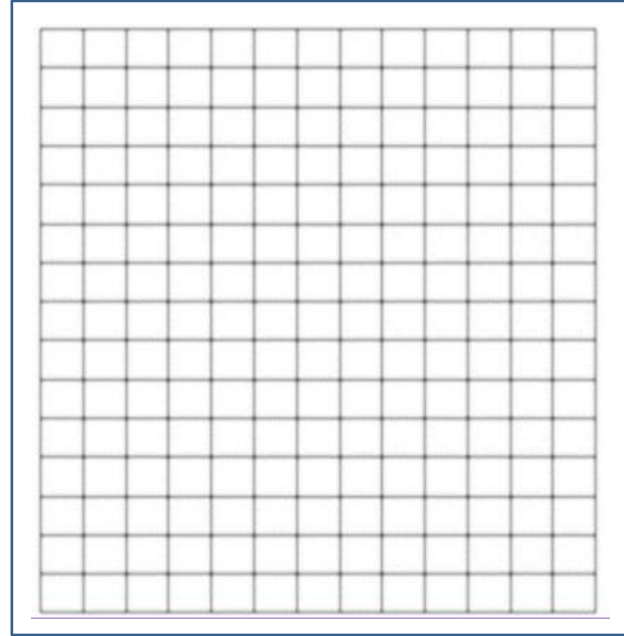
(4A) البؤرة (-6,2) والرأس (-6,-1)

(4B) الرأس (9,-2) والدليل  $x=12$

4C) البؤرة (-4, -3) والمنحنى مفتوح إلى أسفل ويمر بالنقطة (-10, 5)



4D) البؤرة (5, -1) والمنحنى مفتوح إلى اليمين ويمر بالنقطة (-7, 8)







اكتب معادلة مماس منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي عند النقطة المعطاة

تحقق من فهمك : ص 182-



$$y = 4x^2 + 4, (-1, 8) \quad (5A)$$

$$x = 5 - \frac{y^2}{4}, (1, -4) \quad (5B)$$

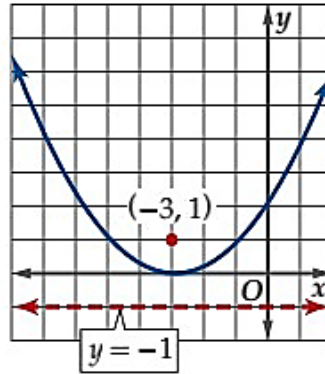
تدرب: ص 184-



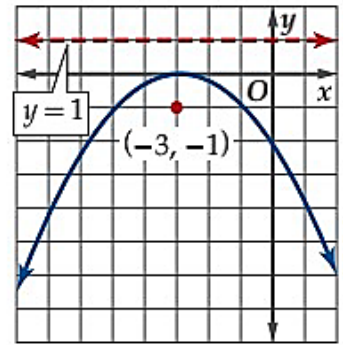
$$(x + 7)^2 = \frac{-1}{2} (y - 3), (-5, 5) \quad (24)$$

**36) اكتشف الخطأ:** مثلت صفيّة وميمونة المنحنى  $x^2 + 6x - 4y + 9 = 0$  بيانياً كما هو موضح أدناه. فأَي التمثيلين صحيح؟ فسّر تبريرك.

ميمونة



صفيّة

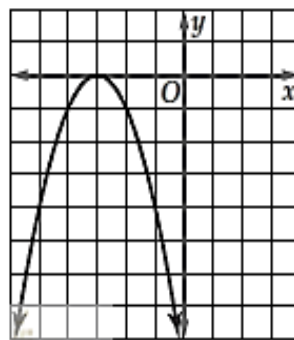


تدرب على الاختبار: ص 185 -

**49)** إذا كان  $x$  عدداً موجباً، فإن  $\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$  تساوي

- A  $x^{-\frac{1}{4}}$  B  $\sqrt{x^3}$  C  $x^{\frac{3}{4}}$  D  $\sqrt{x^5}$

**50)** ما الدالة الرئيسة (الأم) للدالة الموضّح منحناها جانباً؟



- A  $y = x$   
B  $y = |x|$   
C  $y = \sqrt{x}$   
D  $y = x^2$

الواجب:



A large rectangular area with a blue border, containing numerous horizontal dotted lines for writing.

## تحصيلي رياضيات

ما اتجاه القطع المكافئ: $y^2 = 8(x-5)$ ؟				1
يسار	(B)	يمين	(A)	
أعلى	(D)	أسفل	(C)	
ما إحداثيات بؤرة القطع المكافئ: $y^2 = 4x$ ؟				2
(1, 0)	(B)	(0, 1)	(A)	
(4, 0)	(D)	(0, 4)	(C)	
ما معادلة القطع المكافئ: الذي بؤرته (2, 5)، ودليله $x = -3$ ؟				3
$(x + \frac{1}{2})^2 = -10(y - 5)$	(B)	$(x + \frac{1}{2})^2 = -10(y - 5)$	(A)	
$(x + \frac{1}{2})^2 = -10(y - 5)$	(D)	$(x + \frac{1}{2})^2 = -10(y - 5)$	(C)	
ما اتجاه القطع المكافئ: $x^2 = 3(y - 2)$ ؟				4
يسار	(B)	يمين	(A)	
أعلى	(D)	أسفل	(C)	
ما اتجاه القطع المكافئ الذي بؤرته (5,3)، ودليله $y = 1$ ؟				5
يسار	(B)	يمين	(A)	
أعلى	(D)	أسفل	(C)	
ما اتجاه القطع المكافئ الذي رأسه (1,2)، ودليله $y = 5$ ؟				6
يسار	(B)	يمين	(A)	
أعلى	(D)	أسفل	(C)	
ما إحداثيات رأس القطع المكافئ: $(x - 2)^2 = 8(y + 2)$ ؟				7
(-2, 2)	(B)	(-2, -2)	(A)	
(2, 2)	(D)	(2, -2)	(C)	
ما معادلة محور تماثل القطع المكافئ: $x^2 - 2x + y = 16$ ؟				8
$x = -1$	(B)	$x = -17$	(A)	
$x = 17$	(D)	$x = 1$	(C)	

## تحصيلي رياضيات

طول الوتر البؤري للقطع المكافئ: $(y - 5)^2 = 8(x - 3)$ ؟				9
5 وحدات	(B)		3 وحدات (A)	
10 وحدات	(D)		8 وحدات (C)	

معادلة محور تماثل القطع المكافئ: $(y - 4)^2 = -6(x + 1)$ ؟				10
$y = 4$	(B)		$y = 1$ (A)	
$x = 4$	(D)		$x = 1$ (C)	

ما إحداثيات رأس القطع المكافئ: $2(x - 2)^2 = (y + 3)$ ؟				11
$(-2, 3)$	(B)		$(-3, 2)$ (A)	
$(3, -2)$	(D)		$(2, -3)$ (C)	

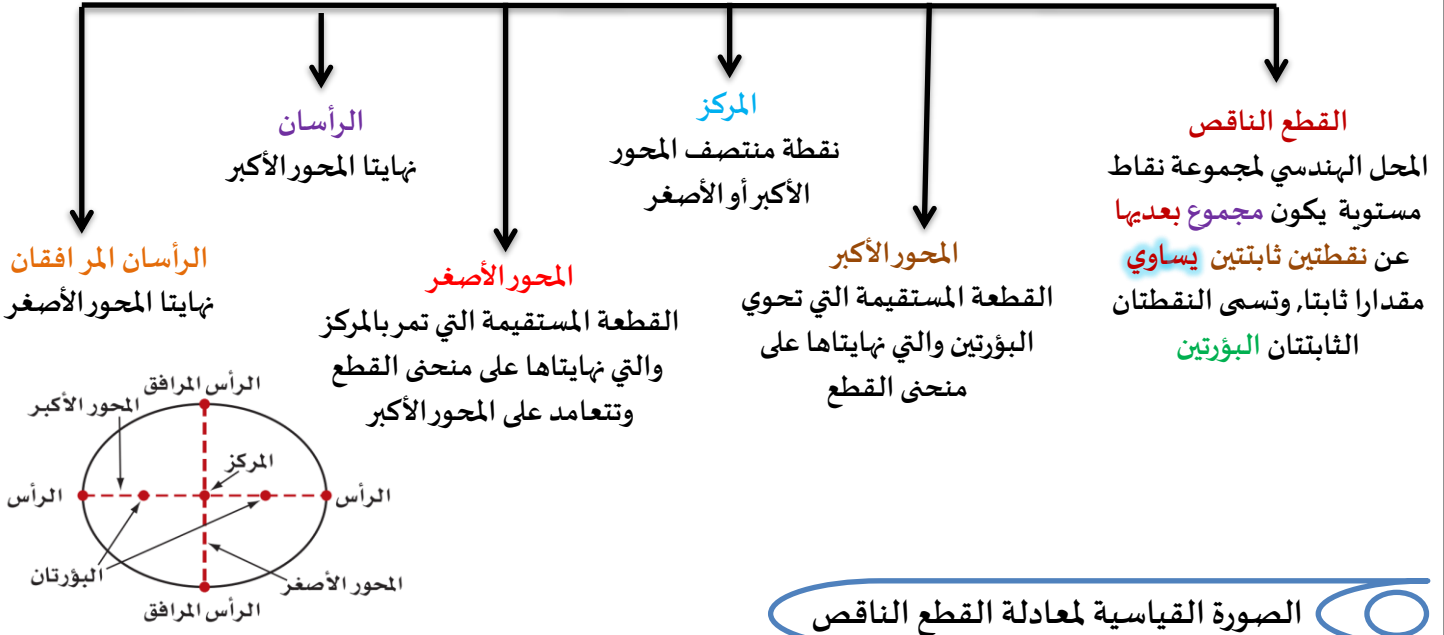
ما معادلة القطع المكافئ: الذي رأسه $(0, 0)$ ، ومحوره منطبق على محور $y$ ويمر بالنقطة $(4, -2)$ ؟				12
$y^2 = 8x$	(B)		$x^2 = 8y$ (A)	
$y^2 + 8x = 0$	(D)		$x^2 + 8y = 0$ (C)	

				13
	(B)		(A)	
	(D)		(C)	

				14
	(B)		(A)	
	(D)		(C)	

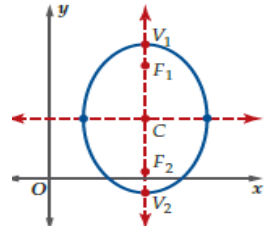
				15
	(B)		(A)	
	(D)		(C)	

## تحليل القطع الناقص وتمثيله بيانيا



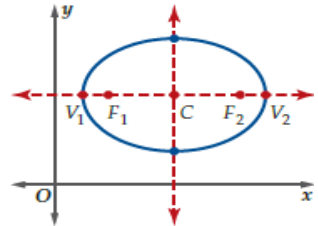
**القطع الناقص رأسيا**

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$



**القطع الناقص أفقيا**

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$



المحور الأكبر أفقيا	الاتجاه
(h, k)	المركز
(h ± c, k)	البؤرتان
(h ± a, k)	الرأسان
(h, k ± b)	الرأسان المرافقان
2a وطوله Y=k	المحور الأكبر
2b وطوله X=h	المحور الأصغر
$c^2 = a^2 - b^2$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	العلاقة بين a, b, c
2c	طول البعد البؤري

المحور الأكبر رأسي	الاتجاه
(h, k)	المركز
(h, k ± c)	البؤرتان
(h, k ± a)	الرأسان
(h ± b, k)	الرأسان المرافقان
2a وطوله X=h	المحور الأكبر
2b وطوله Y=k	المحور الأصغر
$c^2 = a^2 - b^2$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	العلاقة بين a, b, c
2c	طول البعد البؤري

**البعد البؤري:**

المسافة بين البؤرتين تسمى البعد البؤري .  
 لرسم القطع الناقص نعين نقاطا مساعدة  
 وهي التي تبعد مسافة  $\frac{b^2}{a^2}$  أعلى وأسفل كل  
 من البؤرتين


**اتجاه القطع الناقص :**

➤ إذا كان  $(x - h)^2$  مقسوما على  $a^2$  في الصورة القياسية  
 لمعادلة القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون أفقيا .  
 ➤ أما إذا كان  $(y - k)^2$  مقسوما على  $a^2$  فإن المحور الأكبر  
 يكون رأسيا ، حيث  $a^2 > b^2$  دائما.

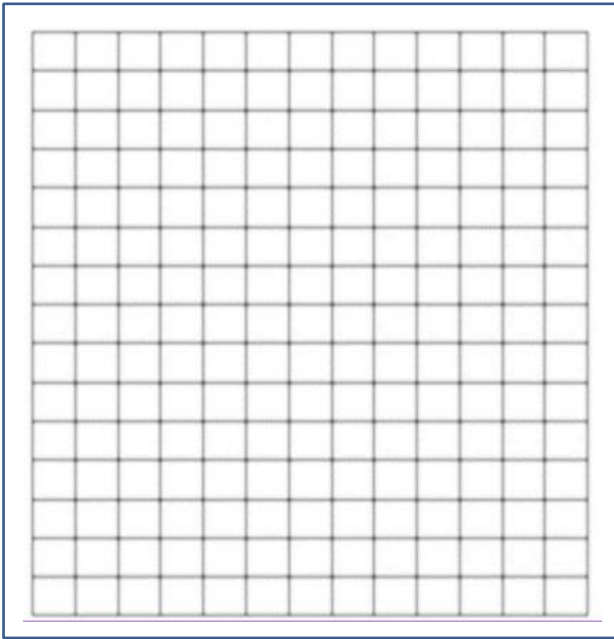
**1 تحديد خصائص القطع الناقص وتمثيل منحناه بيانيا**

1

$$\frac{(x-6)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

(1A) حدد خصائص القطع الناقص ثم مثله بيانيا

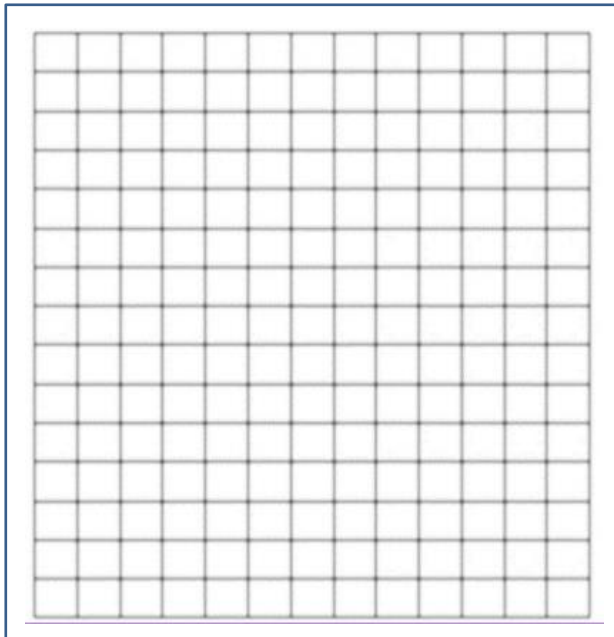
تحقق من فهمك : ص 188-



	الاتجاه
	المركز
	البؤرتان
	الرأسان
	الرأسان المرافقان
	المحور الأكبر وطوله
	المحور الأصغر وطوله
	العلاقة بين $a, b, c$
	طول البعد البؤري

$$x^2 + 4y^2 + 4x - 40y + 103 = 0$$

(1B) حدد خصائص القطع الناقص ثم مثله بيانيا



	الاتجاه
	المركز
	البؤرتان
	الرأسان
	الرأسان المرافقان
	المحور الأكبر وطوله
	المحور الأصغر وطوله
	العلاقة بين $a, b, c$
	طول البعد البؤري





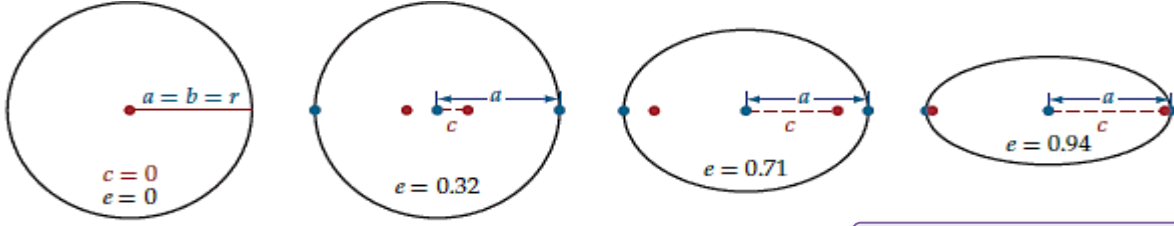


## الاختلاف المركزي

3

$$e = \frac{c}{a}$$
 هو نسبة  $c$  إلى  $a$

 حيث  $c$  هي المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص

 تقع قيمته دائما بين **0,1** وتحدد مدى دائرية أو اتساع القطع الناقص


تحقق من فهمك : ص 189-



حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

$$\frac{x^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1 \quad (3A)$$

$$\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1 \quad (3B)$$

تدرّب: ص 192-



$$\frac{(x+6)^2}{40} + \frac{(y-2)^2}{12} = 1 \quad (11)$$

4 استعمال الاختلاف المركزي

تحقق من فهمك : ص 189 -



4) الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39 فإذا كان عمق العين 25mm فما ارتفاعها؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

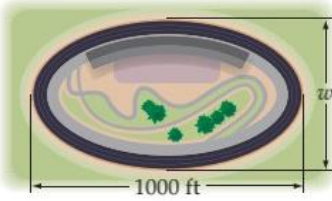
.....

تدرب: ص 192 -



14) يوضح الشكل المجاور مضمار سباق على شكل قطع ناقص اختلافه المركزي 0.75

(A) ما أقصى عرض  $w$  لمضمار السباق؟



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

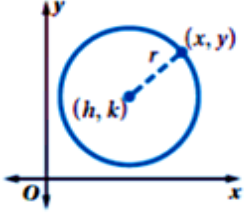
(B) اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المضمار؟

5 الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

معادلة دائرة مركزها  $(h, k)$

وطول نصف قطرها  $r$

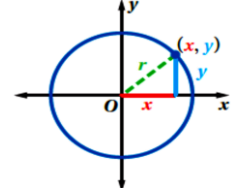
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$



معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل

وطول نصف قطرها  $r$

$$(x)^2 + (y)^2 = r^2$$



تحقق من فهمك : ص 191 -



5A) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها  $(0,0)$  ونصف قطرها 3

5B) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها  $(5,0)$  وقطرها 10

تدرب: ص 192 -



16) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها  $(-4,-3)$  وقطرها 12

17) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 7

6 كتابة معادلة دائرة طرفا قطر فيها معلومان

نوجد نصف القطر باستعمال قانون المسافة بين نقطتين

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



نوجد المركز باستعمال قانون نقطة المنتصف

$$(h, k) = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

تحقق من فهمك: ص 191 -



6) أوجد معادلة دائرة ، إذا كان طرفا قطر فيها (1,5) , (3,-3)

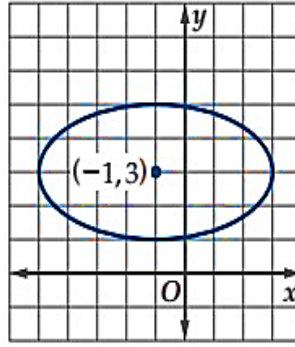
تدرب: ص 192 -



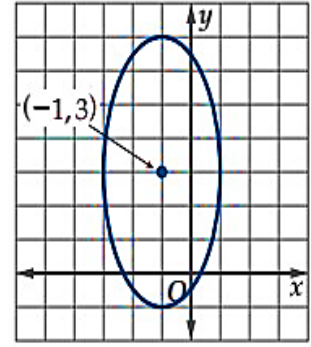
18) أوجد معادلة دائرة ، إذا كان طرفا قطر فيها (2,-4) , (2, 1)

**(37) اكتشاف الخطأ:** مثل خالد وياسر بيانياً القطع الناقص الذي مركزه  $(-1, 3)$ ، وطول محوره الأكبر 8 وحدات، وطول محوره الأصغر 4 وحدات، كما في الشكلين أدناه. هل إجابة أي منهما صحيحة؟

ياسر



خالد



تدرّب على الاختبار: ص 193 -

**(53)** تبعد النقطة  $K$  مسافة 10 وحدات عن مركز دائرة  $M$ ، نصف قطرها 6 وحدات. فإذا رسم مماس من  $K$  إلى الدائرة، فما المسافة من  $K$  إلى نقطة التماس؟

A 6      B 8      C 10      D  $2\sqrt{34}$

**(54)** يريد حسام أن يصنع لعبة لوحه السهام على شكل قطع ناقص أفقي. أبعاد اللوحة 27 بوصة و 15 بوصة. أي المعادلات الآتية يجب أن يستعملها لرسم اللعبة؟

$$\frac{y^2}{56.25} + \frac{x^2}{182.25} = 1 \quad \text{C} \qquad \frac{y^2}{13.5} + \frac{x^2}{7.5} = 1 \quad \text{A}$$

$$\frac{y^2}{7.5} + \frac{x^2}{13.5} = 1 \quad \text{D} \qquad \frac{y^2}{182.25} + \frac{x^2}{56.25} = 1 \quad \text{B}$$

الواجب:

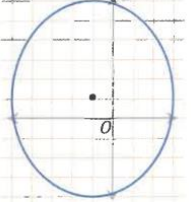
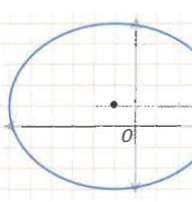
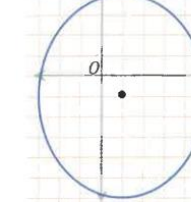
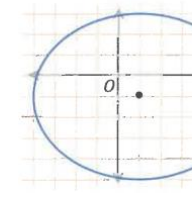


A large rectangular area with a blue border, containing numerous horizontal dotted lines for writing.



## تحصيلي رياضيات

في القطع الناقص: $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y-12)^2}{9} = 1$ طول المحور الأكبر...				1
6 وحدات	(B)	4 وحدات	(A)	
18 وحدة	(D)	12 وحدة	(C)	

التمثيل البياني للقطع الذي معادلته: $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y-12)^2}{9} = 1$ هو...				2
	(B)		(A)	
	(D)		(C)	

مركز القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{16} = 1$ هو...				3
(7, 5)	(B)	(5, 7)	(A)	
(-7, -5)	(D)	(-5, -7)	(C)	

ما الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته: $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$				4
e = 1	(B)	e = 0.66	(A)	
e = 1.66	(D)	e = 1.25	(C)	

قطع ناقص المسافة بين بؤرتيه 10 وحدات وطول محوره الأكبر 16 وحدة فإن اختلافه المركزي e يساوي .....				5
$\frac{8}{5}$	(B)	$\frac{5}{8}$	(A)	
10	(D)	6	(C)	

القطع الذي اختلافه المركزي e = 0 عبارة عن .....				6
قطع زائد	(B)	قطع مكافئ	(A)	
مربع	(D)	دائرة	(C)	

## تحصيلي رياضيات

في القطع الناقص قيمة الاختلاف المركزي تنحصر بين 0 و.....			
-1	(B)		(A) -2
2	(D)		(C) 1

في القطع الناقص: $1 = \frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25}$ ، طول المحور الأصغر هو...			
5 وحدات	(B)		(A) 3 وحدات
10 وحدات	(D)		(C) 6 وحدات

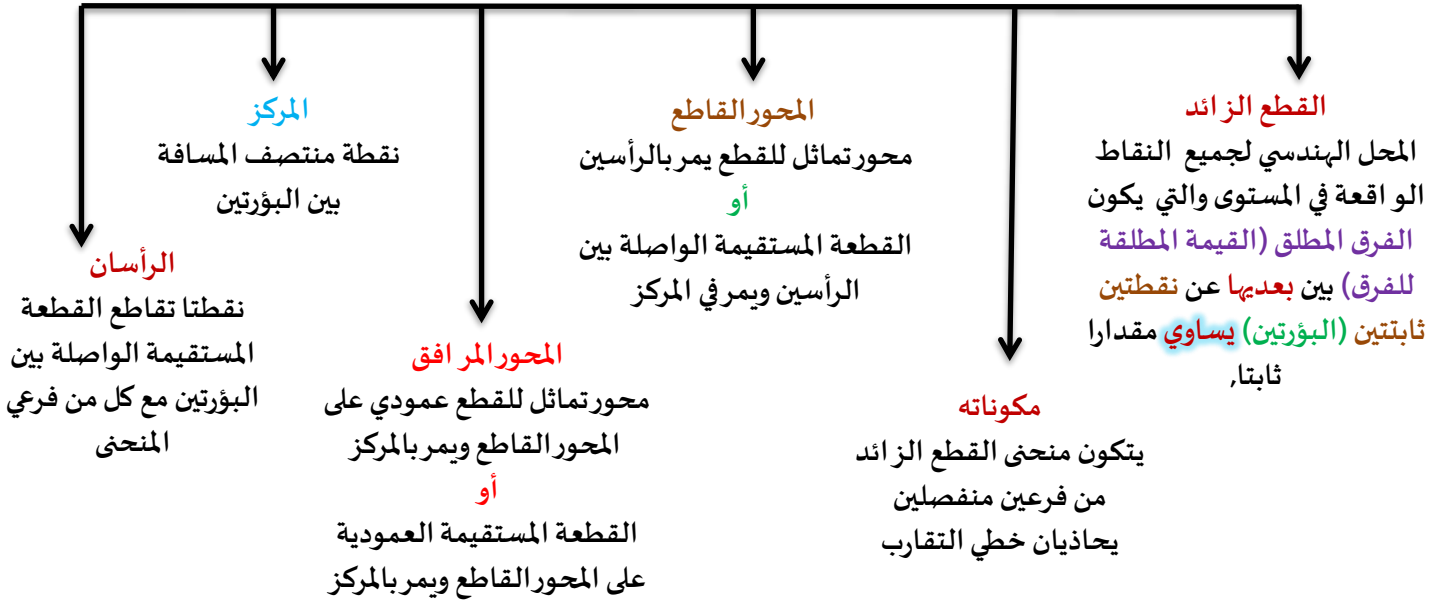
أي القطوع الناقصة التالية مركزه النقطة: (3, 1)؟			
$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{6} = 1$	(B)		$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{6} = 1$ (A)
$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1$	(D)		$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{6} = 1$ (C)

	(B)		(A)
	(D)		(C)

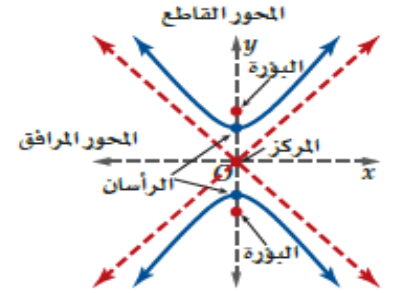
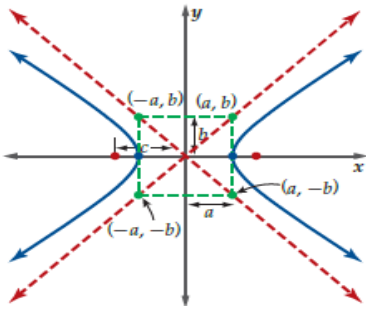
	(B)		(A)
	(D)		(C)

	(B)		(A)
	(D)		(C)

تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانيا



يتميز التمثيل البياني للقطع الزائد بارتباطه بمستطيل متناظر حول محوري تماثل القطع نفسه ، وله ضلعان متواجهان طول كل منهما  $2b$  ، ويمسان القطع عند رأسيه ، وضلعاه الآخران طول كل منهما  $2a$  ، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب  $2c$ .



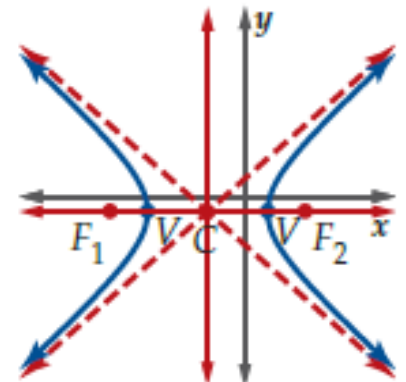
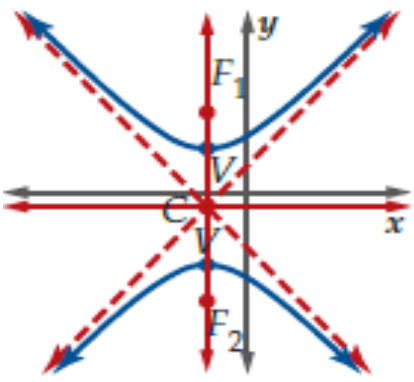
الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد

القطع الزائد رأسيا

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

القطع الزائد أفقيا

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$



تحديد خصائص قطع زائد معادلته معطاه على الصورة القياسية

1

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$$

(1A) حدد خصائص القطع الزائد ثم مثله بيانيا

تحقق من فهمك : ص 197-



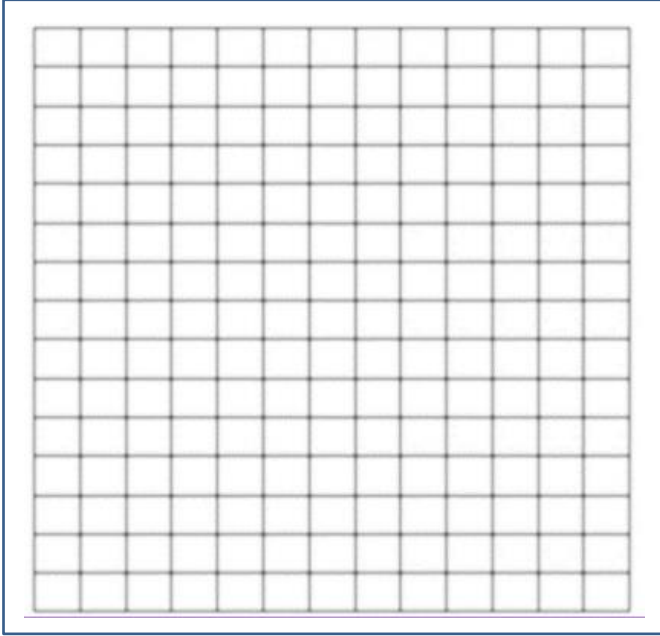
a =

b =

c =

k =

h =



	الاتجاه
	المركز
	البؤرتان
	الرأسان
	المحور المرافق وطوله
	المحور القاطع وطوله
	خطا التقارب
	العلاقة بين a , b, c
	طول البعد البؤري

$$\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1$$

(1B) حدد خصائص القطع الزائد ثم مثله بيانيا:

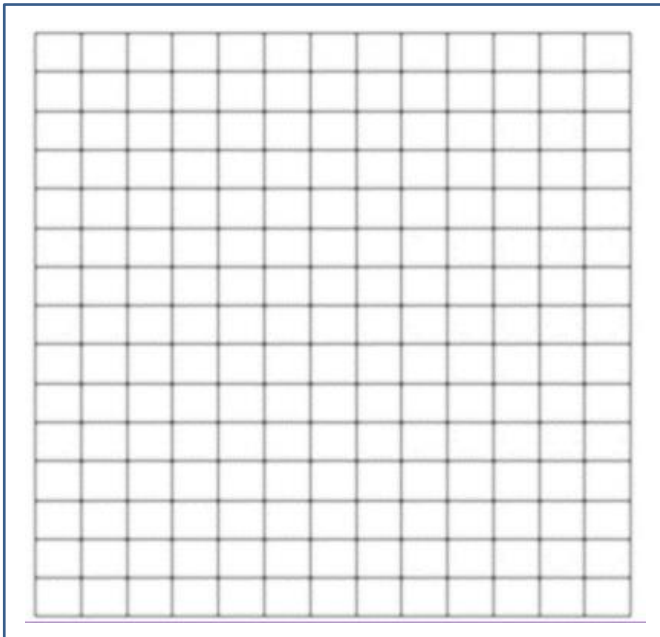
a =

b =

c =

k =

h =



	الاتجاه
	المركز
	البؤرتان
	الرأسان
	المحور المرافق وطوله
	المحور القاطع وطوله
	خطا التقارب
	العلاقة بين a , b, c
	طول البعد البؤري

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{36} = 3$$

تدريب: ص 201-



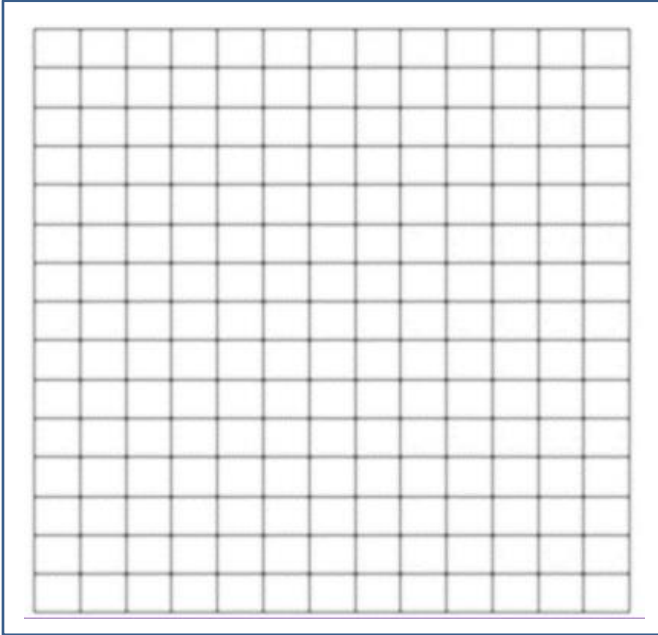
a =

b =

c =

k =

h =



	الاتجاه
	المركز
	البؤرتان
	الرأسان
	المحور المرافق وطوله
	المحور القاطع وطوله
	خطا التقارب
	العلاقة بين a , b , c
	طول البعد البؤري

2 كتابة معادلة القطع الزائد على الصورة القياسية

2



تعيد ترتيب المعادلة لتبسيطها، وتحتاج إلى استعمال بعض الصيغ الرياضية مثل صيغة نقطة المنتصف وقانون المسافة

تحقق من فهمك: ص 198-



اكتب معادلة القطع الزائد على الصورة القياسية في كل مما يأتي ثم حدد خصائصه ومثل منحناه بيانيا

$$4y^2 - 9x^2 - 8y - 36x = 68 \quad (2A)$$

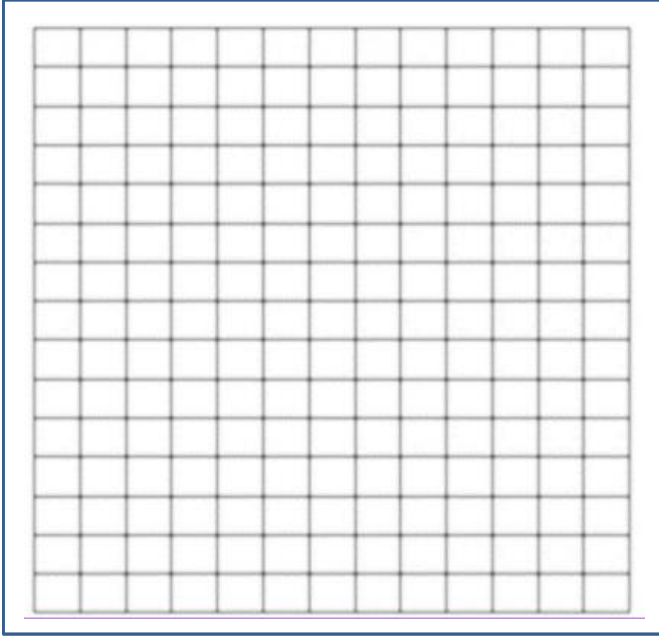
a =

b =

c =

k =

h =



	الاتجاه
	المركز
	البؤرتان
	الرأسان
	المحور المرافق وطوله
	المحور القاطع وطوله
	خطا التقارب
	العلاقة بين a , b, c
	طول البعد البؤري

$$2x^2 - 3y^2 - 12x - 36 = 0 \quad (2B)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

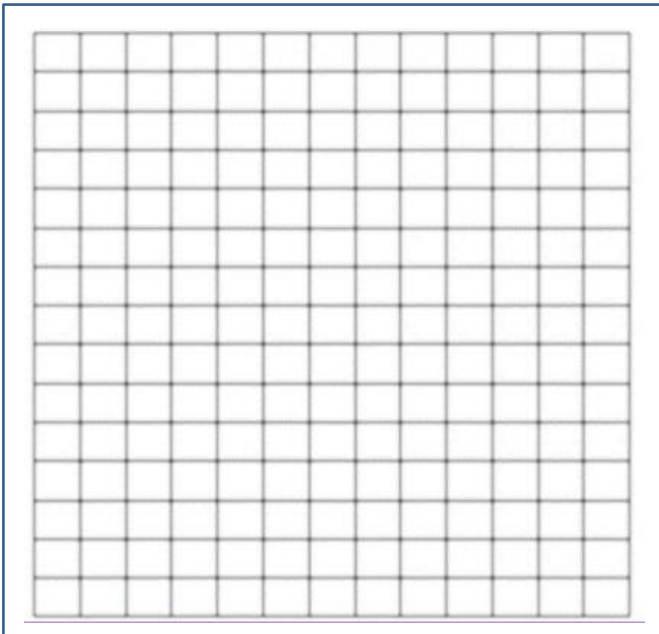
a =

b =

c =

k =

h =



	الاتجاه
	المركز
	البؤرتان
	الرأسان
	المحور المرافق وطوله
	المحور القاطع وطوله
	خطا التقارب
	العلاقة بين a , b, c
	طول البعد البؤري



$$-x^2 + 3y^2 - 4x + 6y = 28 \quad (9)$$

.....

.....

.....

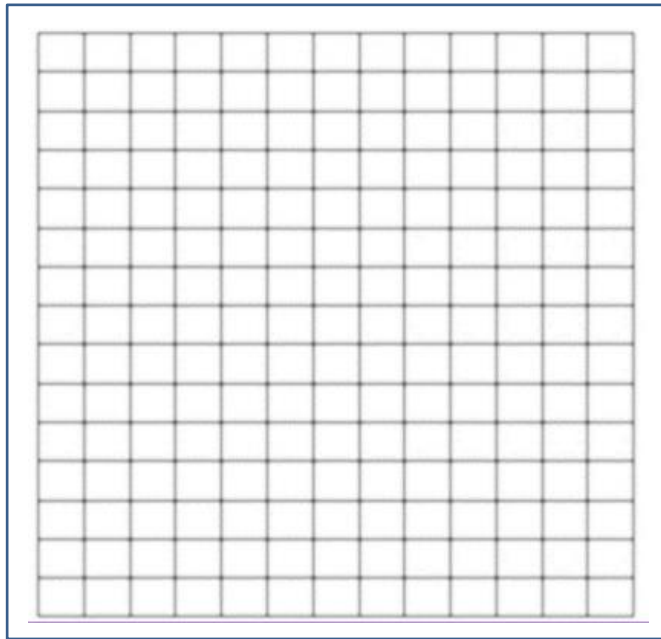
.....

.....

.....

.....

.....

**a =**
**b =**
**c =**
**k =**
**h =**


	الاتجاه
	المركز
	البؤرتان
	الرأسان
	المحور المرافق وطوله
	المحور القاطع وطوله
	خطا التقارب
	العلاقة بين $a, b, c$
	طول البعد البؤري

كتابة معادلة القطع الزائد إذا علمت بعض خصائصه

3

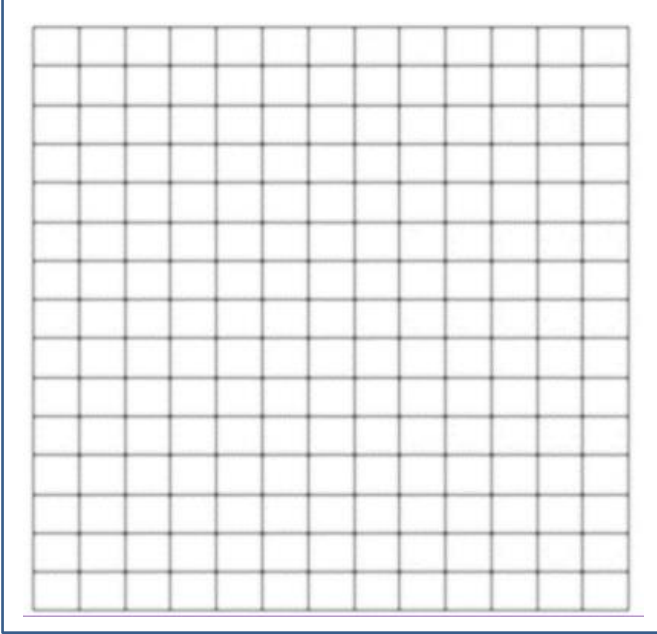
الرأسان أو البؤرتان

 إذا كان لرأسي القطع أو بؤرتي القطع الاحداثي  $y$  نفسه فإن المحور القاطع أفقي ,

 وإذا كان الاحداثي  $x$  نفسه فإن المحور القاطع رأسي




اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي ثم مثل منحناه بيانيا



3A الرأسان (3,6) , (3,2) وطول المحور المرافق 10 وحدات

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

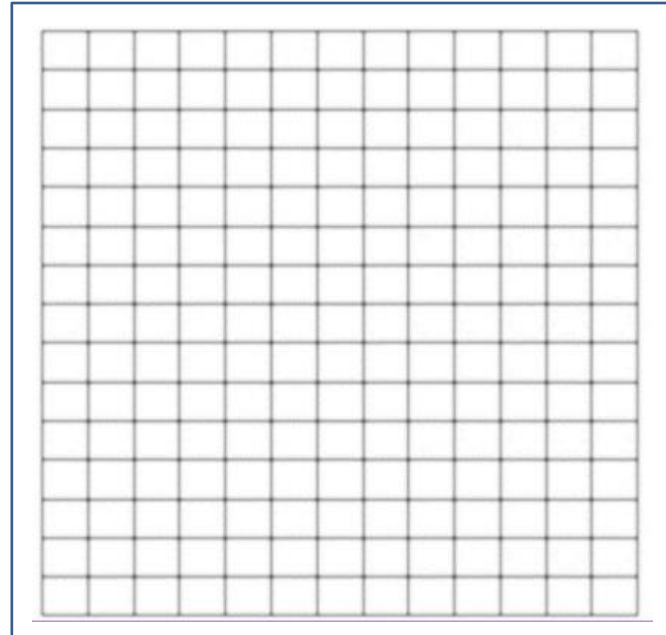
.....

.....

.....

.....

.....



3B البؤرتان (2,-2) , (12,-2) وخطا التقارب

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}, y = \frac{-3}{4}x + \frac{13}{4}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





$$e = \frac{c}{a} \text{ هو نسبة } c \text{ إلى } a$$

قيمته دائما أكبر من 1 وكلما زادت قيمته زاد اتساع المنحنى



تحقق من فهمك : ص 200-



حدد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

$$\frac{(x+8)^2}{64} + \frac{(y-4)^2}{80} = 1 \quad (4A)$$

$$\frac{(y-2)^2}{15} + \frac{(x+9)^2}{75} = 1 \quad (4B)$$

تدرب: ص 202-



$$\frac{(y-1)^2}{10} + \frac{(x-6)^2}{13} = 1 \quad (21)$$



5) تعطلت سفينة عند نقطة في عرض البحر ، بحيث كان الفرق بين بعدي السفينة عن أقرب محطتين إليها 80 ميلا بحريا (A) إذا كان موقعا المحطتين يمثلان بؤرتي قطع زائد تقع السفينة عليه ، فاكتب معادلة القطع الزائد عندما تقع المحطتان عند النقطتين  $(100, 0)$  ،  $(-100, 0)$

(B) أوجد إحداثيي موقع السفينة إذا كانت تقع على المستقيم الواصل بين البؤرتين ، وكانت أقرب إلى المحطة التي إحداثيها  $(100, 0)$



28) يأخذ برج (كوب بورت) في اليابان شكل مجسم ناتج عن دوران قطع زائد حول محوره المرافق . افترض أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي نتج عن دوران البرج تساوي 19 . (A) إذا كان أقصر عرض للبرج هو 8m ، فما معادلة القطع الزائد؟



(B) إذا كان ارتفاع قمة البرج عن مركز القطع الزائد هو 32m ، وانخفاض القاعدة عن المركز هو 76m ، فأوجد نصف قطر القمة ونصف قطر القاعدة ؟

**36) تبرير:** افترض أنك أعطيت اثنتين من خصائص القطع الزائد الآتية: رأسين, بؤرتين, المحور القاطع, المحور الأفقي, خطي تقارب. هل يمكنك كتابة معادلة هذا القطع دائما أو أحيانا أو غير ممكن أبدا؟

تدرب على الاختبار: ص 203-

**47) مراجعة:** يمثل منحنى  $1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2$  قطعاً زائداً. ما معادلتا خطي تقارب هذا المنحنى؟

**A**  $y = \frac{4}{5}x, y = -\frac{4}{5}x$

**B**  $y = \frac{5}{4}x, y = -\frac{5}{4}x$

**C**  $y = \frac{1}{4}x, y = -\frac{1}{4}x$

**D**  $y = \frac{1}{5}x, y = -\frac{1}{5}x$

**48) سؤال ذو إجابة قصيرة:** أوجد معادلتا خطي التقارب للقطع الزائد الذي معادلته  $1 = \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{1}$ .

الواجب:

A large rectangular area with a blue border, containing horizontal dotted lines for writing.

## تحصيلي رياضيات

في القطع الزائد $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ طول المحور القاطع ... وحدات			
3	(A)	4	(B)
6	(C)	8	(D)

مركز القطع الزائد $\frac{(y-4)^2}{48} - \frac{(x+5)^2}{36} = 1$ هو النقطة.....			
(5, 4)	(A)	(4, 5)	(B)
(-5, 4)	(C)	(5, -4)	(D)

المحور القاطع للقطع الزائد $\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y-7)^2}{16} = 1$ هو:...			
$x=5$	(A)	$x=7$	(B)
$y=5$	(C)	$y=7$	(D)

ما معادلة خطي التقارب للقطع الزائد $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ؟			
$y = \pm 4x$	(A)	$y = \pm \frac{3}{4}x$	(B)
$y = \pm \frac{4}{3}x$	(C)	$y = \pm \frac{9}{16}x$	(D)

أي القطوع الزائدة التالية طول محوره المرافق 10 وحدات؟			
$\frac{y^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{25} = 1$	(A)	$\frac{y^2}{25} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$	(B)
$\frac{y^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{10} = 1$	(C)	$\frac{y^2}{10} - \frac{(x-1)^2}{5} = 1$	(D)

ما معادلة خطي التقارب للقطع الزائد: $\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{16} = 1$			
$(y-1) = \pm \frac{9}{16}(x+2)$	(A)	$(y-1) = \pm \frac{16}{9}(x+2)$	(B)
$(y-1) = \pm \frac{3}{4}(x+2)$	(C)	$(y-1) = \pm \frac{4}{3}(x+2)$	(D)

الاختلاف المركزي للقطع الزائد: $\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right) = 1$ يساوي ...			
$\frac{\sqrt{13}}{2}$	(A)	$\frac{\sqrt{31}}{2}$	(B)
$\frac{2}{\sqrt{13}}$	(C)	$\frac{2}{\sqrt{31}}$	(D)

## الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية

1

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

حيث A,B,C لا تساوي جميعها أصفارا

ويمكن تحويل هذه الصورة إلى الصورة القياسية باستعمال طريقة إكمال المربع إذا كانت  $B=0$ 

تحقق من فهمك : ص 204-

1) اكتب المعادلة  $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$  على الصورة القياسية ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله

تدرب: ص 202-

1) اكتب المعادلة  $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$  على الصورة القياسية ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله2) اكتب المعادلة  $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 36 = 0$  على الصورة القياسية ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله



تصنيف القطوع المخروطية باستعمال المميز

قطع زائد  
 $B^2 - 4ac > 0$

قطع مكافئ  
 $B^2 - 4ac = 0$

قطع ناقص  
 $B^2 - 4ac < 0$   
 $B \neq 0, A \neq C$

دائرة  
 $B^2 - 4ac < 0$   
 $B = 0, A = C$

تحقق من فهمك : ص 205-



حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي ، دون كتابتها على الصورة القياسية

$$8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0 \quad (2A)$$

$$3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0 \quad (2B)$$

$$3x^2 + 16x - 12y + 2y^2 - 6 = 0 \quad (2C)$$





حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي ، دون كتابتها على الصورة القياسية

$$4x^2 - 5y = 9x - 12 \quad (5)$$

$$5y^2 = 2x + 6y - 8 + 3x^2 \quad (6)$$

$$8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0 \quad (7)$$

21) تبرير: ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائماً أو صحيحة أحياناً أو غير صحيحة أبداً  
(عندما يكون القطع رأسياً وتكون  $A=C$  فإن القطع دائرة؟)

31) سؤال ذو إجابة قصيرة: حدّد ما إذا كانت المعادلة  $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 5y = 12$  تمثّل قطعاً مكافئاً أو دائرة أو قطعاً ناقصاً أو قطعاً زائداً، دون كتابتها على الصورة القياسية.

32) اختيار من متعدد: ما المعادلة التي تمثّل قطعاً مكافئاً رأسه عند النقطة  $(2, 2)$ ، ويمر بالنقطة  $(0, 6)$ ؟

$y = x^2 - 4x + 6$  A

$y = x^2 + 4x - 6$  B

$y = -x^2 - 4x + 6$  C

$y = -x^2 + 4x - 6$  D

## تحصيلي رياضيات

ما نوع القطع الذي تمثله المعادلة: $4x^2 - 3y^2 + 8y - 12 = 2x + 4y$				1
قطع زائد	(B)	قطع مكافئ	(A)	
دائرة	(D)	قطع ناقص	(C)	

أي التالي يمثل قطعاً ناقصاً؟				2
$25x^2 - y^2 - 19x + 22y + 457 = 0$	(B)	$25x^2 - 25y^2 - 20x + 10y + 457 = 0$	(A)	
$25x^2 - 19x + 22y + 457 = 0$	(D)	$25x^2 + y^2 - 19x + 22y + 457 = 0$	(C)	

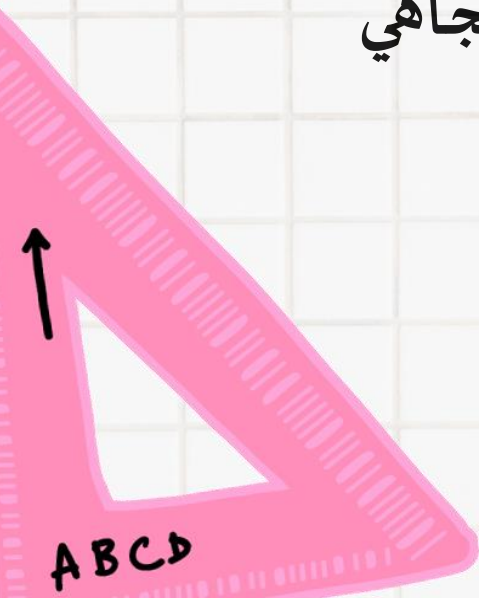
ما قيمة $C$ التي تجعل منحنى المعادلة: $4x^2 + Cy^2 + 2x - 2y - 18 = 0$ دائرة؟				3
-4	(B)	-8	(A)	
8	(D)	4	(C)	



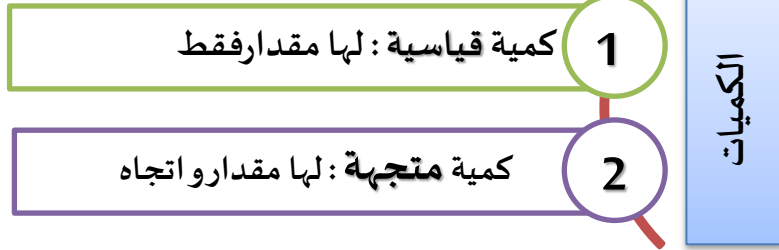
## الفصل الخامس

### المتجهات

- ❖ مقدمة في المتجهات
- ❖ المتجهات في المستوى الاحداثي
- ❖ الضرب الداخلي
- ❖ المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد
- ❖ الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء



1 تحديد الكميات المتجهة:



حدد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية ( العددية ) في كل مما يلي:

تحقق من فهمك : ص 218-



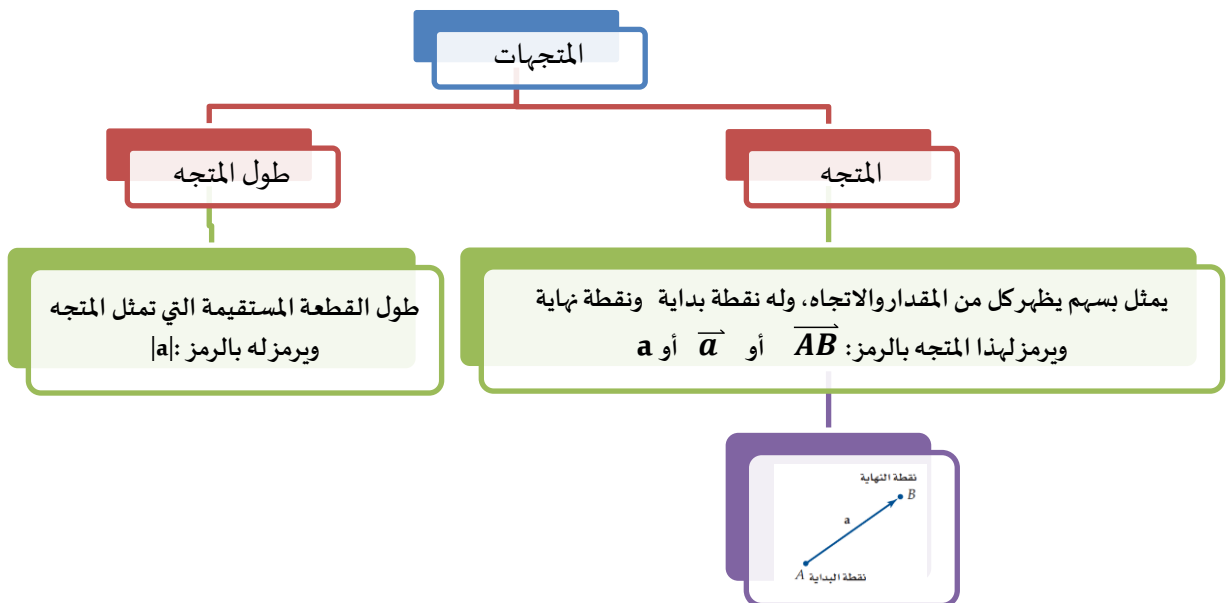
1C طول قطعة مستقيمة 5 cm .	1B هبوط مضلي رأسيا إلى أسفل بسرعة 12.5 mi/h .	1A تسير سيارة بسرعة 60mi/h ، وبزاوية 60° جهة الجنوب الشرقي.
----------------------------	---	---

حدد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية ( العددية ) في كل مما يلي:

تدرب: ص 223-



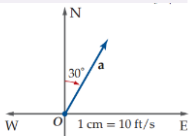
6 رمي حجر رأسيا إلى أعلى بسرعة 50 ft/s .	4 المسافة التي تقطعها كرة قدم 5m .	3 يركض غزال بسرعة 15m/s ، باتجاه الغرب.	2 مساحة مربع 20cm <sup>2</sup>
--	------------------------------------	---	--------------------------------



اتجاه المتجه

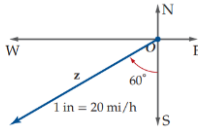
الاتجاه الحقيقي

نبدأ قياس الزاوية من الشمال N نزولا  
(مع عقارب الساعة)  
يعطى قياس الزاوية بثلاث أرقام



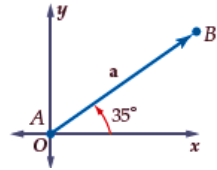
الاتجاه الربيعي  $\phi$

نبدأ قياس الزاوية من الخط الرأسى  
(S أو N) باتجاه الشرق E أو الغرب W  
قياسها بين  $0^\circ$  و  $90^\circ$   
وتكتب الزاوية بين حرفين الاتجاه مثل  
 **$S35^\circ E$** :



اتجاه أفقي (قياسي)

نبدأ قياس الزاوية من محور  
السينات الموجبة لأعلى  
(عكس عقارب الساعة)



إذا أعطي قياس زاوية بثلاثة أرقام ولم تعط  
أي مركبات اتجاهية إضافية  
فإنها زاوية اتجاه حقيقي

تحقق من فهمك: ص 219-



استعمل مسطرة ومنقلة لرسم متجه لكل من الكميات الآتية . واكتب مقياس الرسم في كل حالة

2A)  $t = 20 \text{ ft/s}$  ، باتجاه  $065^\circ$ .

.....

.....

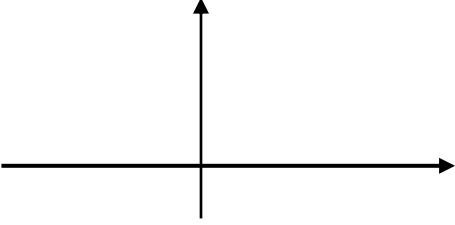
2B)  $u = 15 \text{ mi/h}$  ، باتجاه  $S25^\circ E$ .

.....

.....

(2c)  $m = 60N$  ، بزاوية قياسها:  $80^\circ$ .

.....



تدرب: ص 223 -

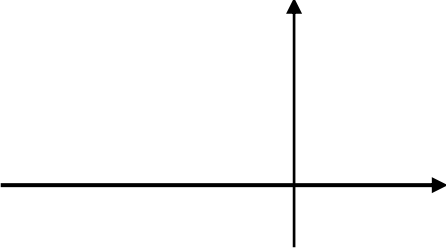


استعمل مسطرة ومنقلة لرسم متجه لكل من الكميات الآتية ، واكتب مقياس الرسم في كل حالة

(8)  $g = 6 \text{ km/h}$  ، باتجاه:  $N70^\circ W$ .

.....

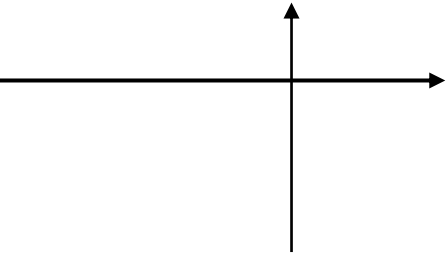
.....



(9)  $j = 5 \text{ ft/s}$  ، بزاوية قياسها:  $300^\circ$  مع الأفقي .

.....

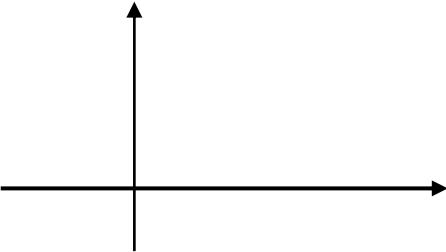
.....



(12)  $n = 32 \text{ m/s}$  ، باتجاه:  $030^\circ$ .

.....

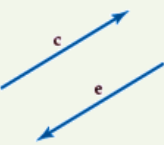
.....



**المتجهات المتعكسة**

لهما اتجاهين مختلفين

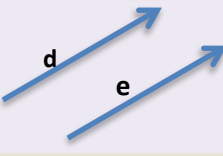
لهما الطول نفسه



**المتجهات المتساوية**

لهما الإتجاه نفسه

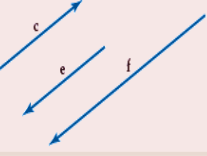
لهما الطول نفسه



**المتجهات المتوازية**

لهما الإتجاه نفسه أو متعاكسان

ليس بالضرورة لهما الاتجاه نفسه



أنواع المتجهات

إيجاد محصلة متجهين:

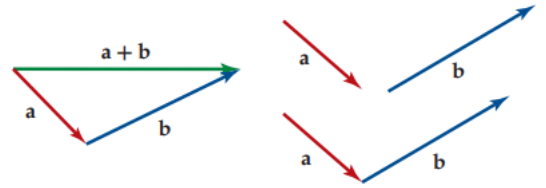
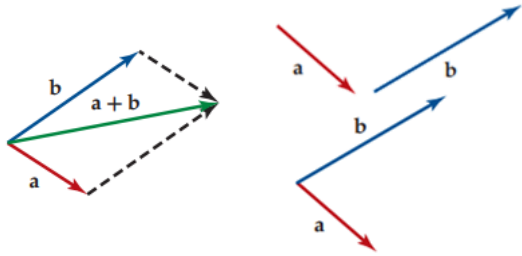
3

### قاعدة متوازي الأضلاع

### قاعدة المثلث

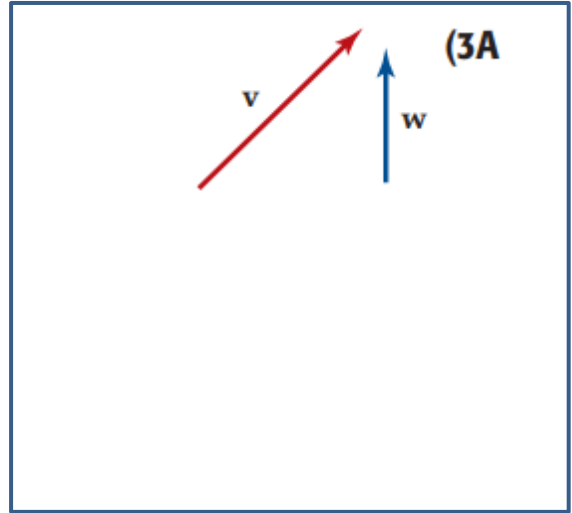
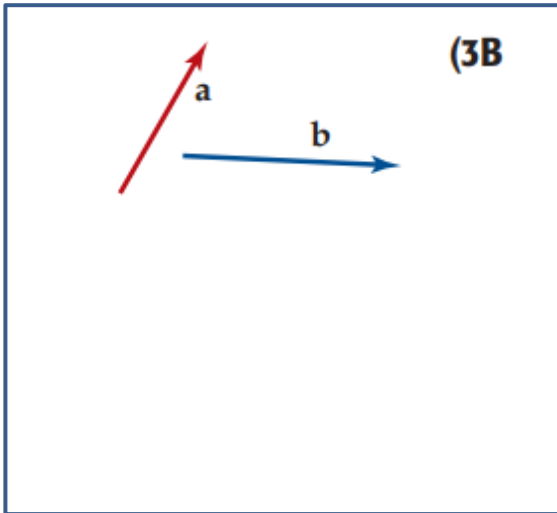
لا بد أن تلتقي بداية المتجه الثاني مع بداية المتجه الأول ومن ثم نكمل رسم متوازي الأضلاع وبالتالي تكون المحصلة هي قطر متوازي الأضلاع

لا بد أن تلتقي بداية المتجه الثاني مع نهاية المتجه الأول وبالتالي تكون بداية المحصلة هي بداية المتجه الأول ونهايتها هي نهاية المتجه الثاني



أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملاً قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع ، ثم حدد اتجاهها بالنسبة للأفقي

تحقق من فهمك : ص 221 -

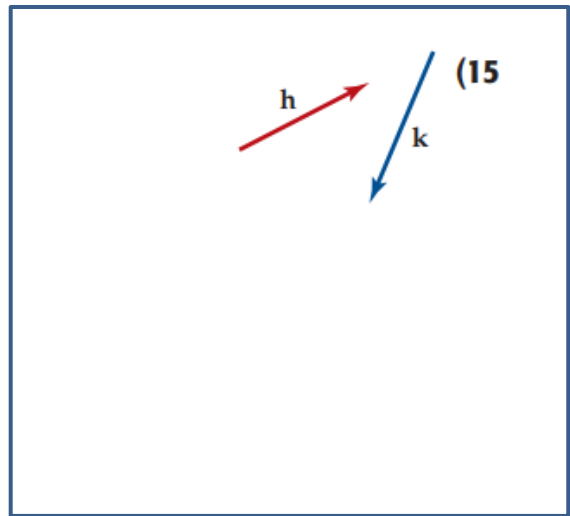
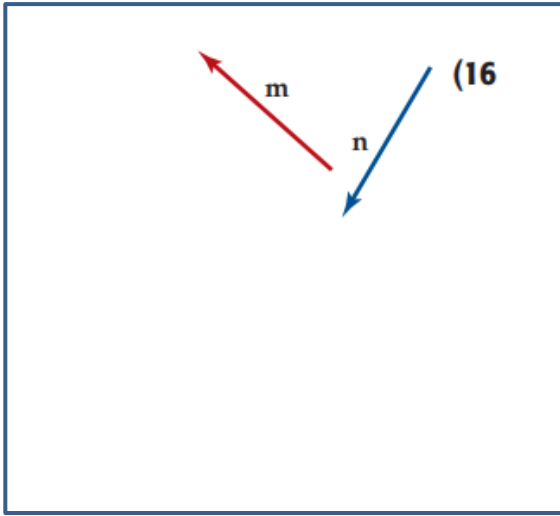


3C) لعبة أطفال: رمى طفل كرة صغيرة في لعبة مخصصة للأطفال بسرعة  $7 \text{ in/s}$  ، باتجاه  $310^\circ$  ، فارتدت باتجاه  $055^\circ$  ، وبسرعة  $4 \text{ in/s}$  . أوجد مقدار محصلة حركة الكرة واتجاهها. (قرب طول المحصلة إلى أقرب بوصة ، والاتجاه إلى أقرب درجة)



أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملا قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع ، ثم حدد اتجاهها بالنسبة للأفقي

تدرب: ص 223-

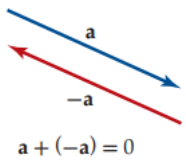


حدد مقدار المحصلة الناتجة من جمع المتجهين واتجاهها في كل مما يأتي:

تدرب: ص 223-



- ..... (18) 18N للأمام ، ثم 20 N للخلف
- ..... (19) 100 m للشمال ، ثم 350 m للجنوب
- ..... (20) 17 mi شرقا ، ثم 16 mi جنوبا
- ..... (21)  $15m\ S^2$  باتجاه زاوية قياسها  $60^\circ$  مع الأفقي ، ثم  $9.8\ mi\ S^2$  إلى الأسفل



عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه فإن المحصلة هي المتجه الصفري يرمز له بالرمز  $\vec{0}$  أو 0، وليس له اتجاه

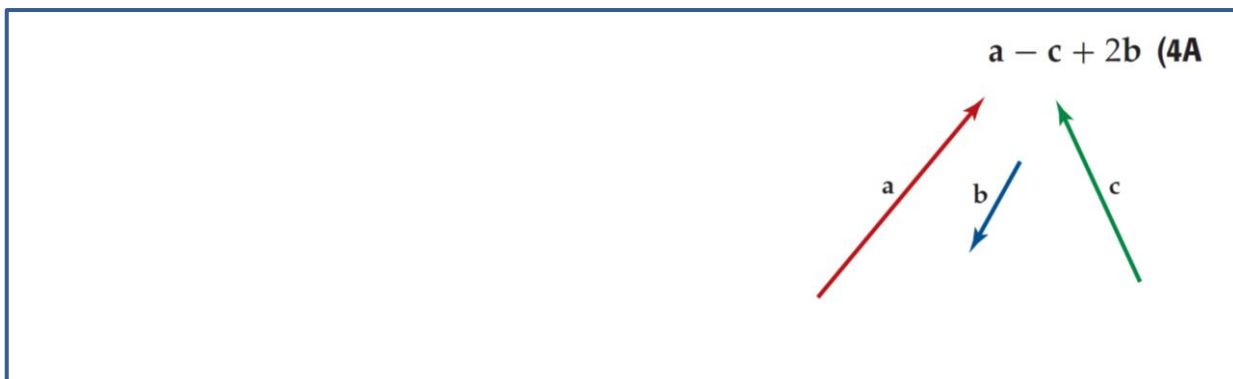


العمليات على المتجهات

4

ارسم المتجه الذي يمثل كلا مما يأتي:

تحقق من فهمك : ص 221-

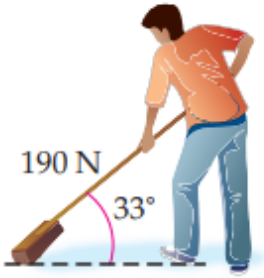




تدرب: ص 224-



(29) تنظيف: يدفع حسن عصا مكنسة التنظيف بقوة مقدارها  $190N$  ، وبزاوية قياسها  $33^\circ$  مع سطح الرض كما في الشكل .



(A) ارسم شكلا يوضح تحليل هذه القوة رعة إلى مركبتها المتعامدين.

(B) أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقية والرأسية..

.....

.....

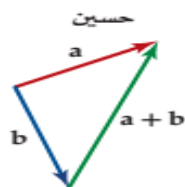
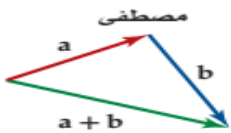
.....

.....

.....

اكتشف الخطأ: حاول كل من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين  $a$  ،  $b$  ، أيهما كانت إجابته صحيحة برر إجابتك.

مهارات التفكير العليا: ص 225-



.....

.....

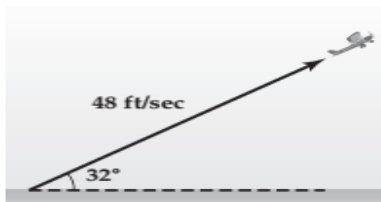
.....

.....

.....

(56) طارت طائرة لعبة تسير باستعمال جهاز التحكم عن بعد بزاوية قياسها  $32^\circ$  مع الأفقي ، وبسرعة  $48ft/s$  كما في الشكل ، أي مما تأتي يمثل مقدار المركبتين الأفقية والرأسية لسرعة الطائر؟.

تدرب على الاختبار: ص 225-

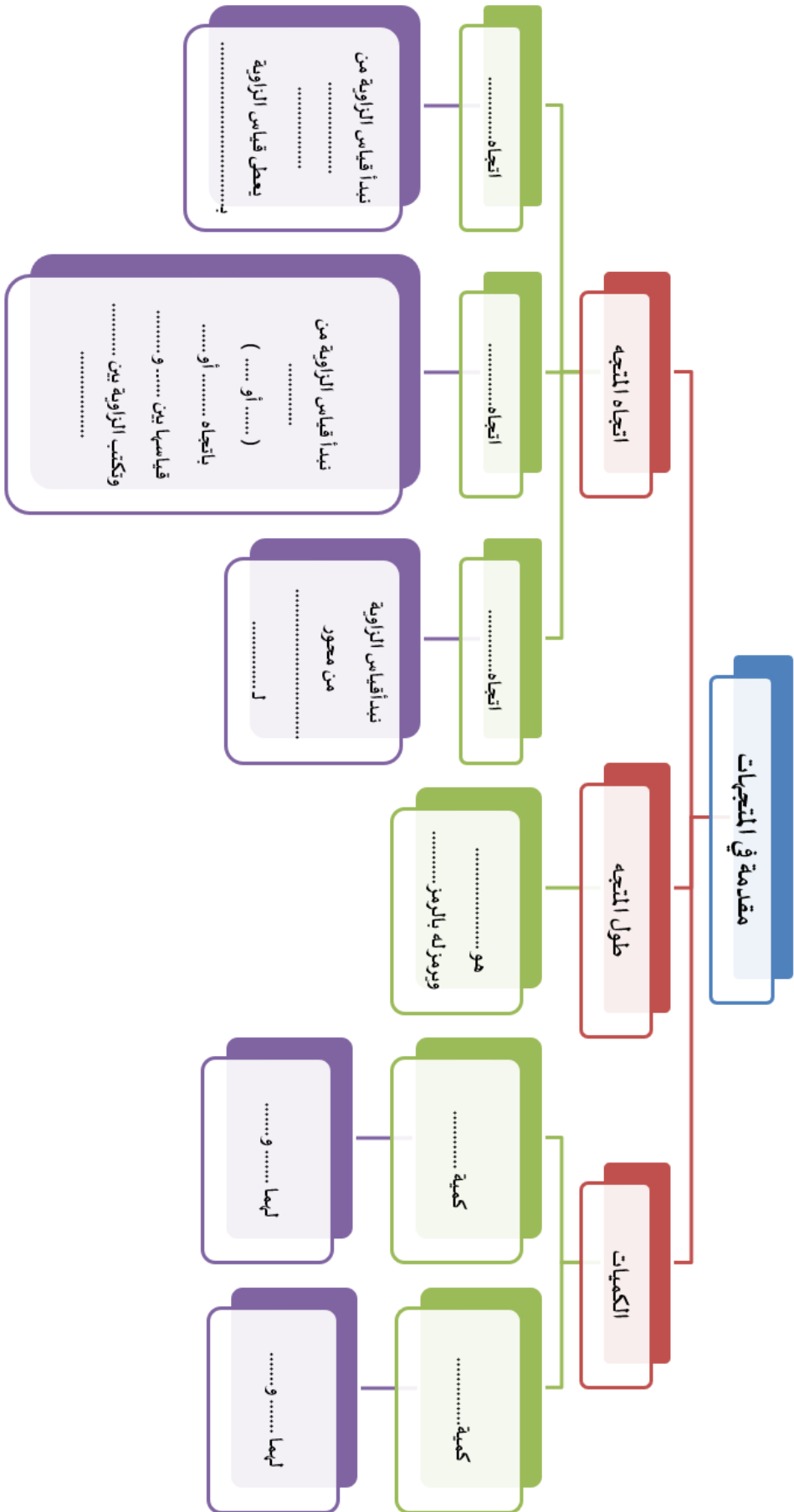


(A)  $25.4ft/s$  ،  $40.7 ft/s$

(B)  $40.7ft/s$  ،  $25.4 ft/s$

(C)  $56.6ft/s$  ،  $90.6 ft/s$

(D)  $90.6ft/s$  ،  $56.6 ft/s$



الواجب:

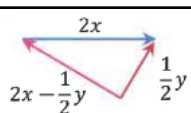
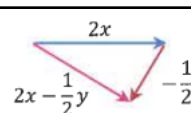
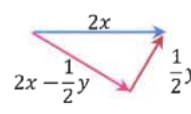
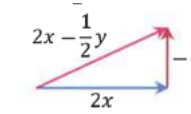


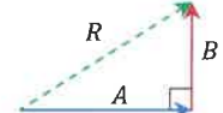
A large rectangular area with a blue border, containing numerous horizontal dotted lines for writing the answer.

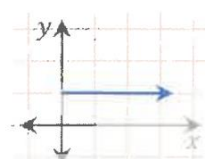
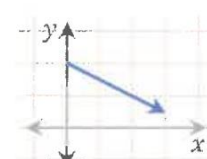
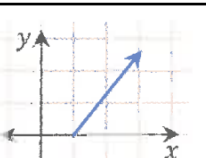
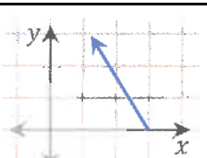
## تحصيلي رياضيات

أي الكميات التالية كمية متجهة؟			
المسافة	(B)		(A) الزمن
الكتلة	(D)		(C) الإزاحة

إذا كان المتجه $a = \langle 3, 5 \rangle$ يوازي المتجه $b$ وعكس اتجاهه، فإن $b$ يساوي ....			
$\langle 0, 3 \rangle$	(B)		(A) $\langle -3, -5 \rangle$
$\langle 6, 10 \rangle$	(D)		(C) $\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \rangle$

إذا كان الشكل يمثل المتجهين $x, y$ فأي التالي يمثل			
	(B)		(A) 
	(D)		(C) 

في الشكل المجاور إذا كانت قيمة المتجه $A$ تساوي 5 ، وقيمة المتجه $B$ تساوي 6 ، فما قيمة متجه المحصلة ؟			
			
$\sqrt{40}$	(B)		(A) $\sqrt{61}$
$\sqrt{11}$	(D)		(C) $\sqrt{13}$

أي المتجهات التالية له مركبة أفقية أكبر؟			
	(B)		(A) 
	(D)		(C) 

تسير باخرة بزاوية قيمتها $60^\circ$ مع الأفقي وبسرعة 100 km/h ، ما مقدار المركبة الأفقية لسرعة الباخرة؟			
$50\sqrt{3}$ km/h	(B)		(A) 50 km/h
$200\sqrt{3}$ km/h	(D)		(C) 200 km/h

## تحصيلي رياضيات

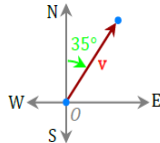
إذا كان قياس زاوية الاتجاه الحقيقي لمتجه $155^\circ$ فإن اتجاهه الربعي هو...			
S25°E	(B)	N55°E	(A)
N35°E	(D)	W55°S	(C)

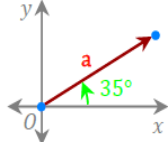
المتجه الذي يمثل محصلة المتجهين الآخرين في الشكل هو:....			
			
u	(B)	V	(A)
W + V	(D)	W	(C)

المركبة الرأسية لمتجه طوله $5\text{in}$ , وقياس زاوية اتجاهه $32^\circ$			
2.65 in	(B)	4.24 in	(A)
31.88 in	(D)	2.79 in	(C)

إذا كان اتجاه متجه $180^\circ$ فإن قياس زاوية اتجاهه الحقيقي....			
180°	(B)	90°	(A)
300°	(D)	270°	(C)

إذا كان اتجاه متجه $120^\circ$ فإن قياس زاوية اتجاهه الربعي ....			
N 30° E	(B)	N 30° W	(A)
N 60° E	(D)	N 60° W	(C)

زاوية الاتجاه الربعي للمتجه في الشكل			
			
N 55° E	(B)	N 35° E	(A)
N 35° W	(D)	W 55° S	(C)

قياس زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه في الشكل			
			
035°	(B)	35°	(A)
090°	(D)	055°	(C)

التعبير عن المتجه في الصورة الاحداثية:

1



الصورة الاحداثية لـ  $\overrightarrow{AB}$  ، الذي نقطة بدايته  $A(x_1, y_1)$  ، ونقطة نهايته  $B(x_2, y_2)$  ، هي:  $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$

 أوجد الصورة الإحداثية لـ  $\overrightarrow{AB}$  المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يلي:

تحقق من فهمك: ص 226-


 (1B)  $A(0, 8), B(-9, -3)$ 

 (1A)  $A(-2, -7), B(6, 1)$ 

إيجاد طول المتجه:

2


 إذا كان  $v$  متجهها نقطة بدايته  $(x_1, y_1)$  ، ونقطة نهايته  $(x_2, y_2)$  ، فإن طول  $v$  هو:

$$|v| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت  $\langle a, b \rangle$  الصورة الاحداثية للمتجه  $v$  فإن:

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

 أوجد طول  $\overrightarrow{AB}$  المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يلي:

تحقق من فهمك: ص 227-


 (2B)  $A(0, 8), B(-9, -3)$ 

 (2A)  $A(-2, -7), B(6, 1)$ 

 أوجد الصورة الإحداثية وطول  $\overrightarrow{AB}$  المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يلي:

تدريب: ص 231-


 (2)  $A(2, -7), B(-6, 9)$ 

 (1)  $A(-3, 1), B(4, 5)$





أوجد كلاما يأتي للمتجهات:  $a = \langle 2, 5 \rangle$ ,  $b = \langle -3, 0 \rangle$ ,  $c = \langle -4, 1 \rangle$ :

$$4c + b \quad (3A)$$

$$-3c \quad (3B)$$

$$2c + 4a - b \quad (3C)$$

تدرب: ص 231-



إذا كان:  $f = \langle 8, 0 \rangle$ ,  $g = \langle -3, -5 \rangle$ ,  $h = \langle -6, 2 \rangle$  فأوجد:

$$2f + g - 3h \quad (9)$$

$$4g - 3f + h \quad (12)$$

إيجاد متجه وحده له نفس الاتجاه لمتجه معطى:

4

أوجد متجه الوحده الذي له نفس اتجاه المتجه المعطى في كل مما يأتي:

تحقق من فهمك : ص 228-



$$w = \langle 6, -2 \rangle \text{ (4A)}$$

$$x = \langle -4, -8 \rangle \text{ (4B)}$$

أوجد متجه الوحده الذي له نفس اتجاه المتجه المعطى في كل مما يأتي:

تدرب: ص 231-



$$v = \langle -2, 7 \rangle \text{ (13)}$$

كتابة متجه على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة:

5

يمكن استعمال المتجهين  $i, j$  للتعبير عن أي متجه  $\langle a, b \rangle$  على الصورة  $v = ai + bj$  وتسمى الصورة  $ai + bj$  توافقاً خطياً للمتجهين  $i, j$



برمز لمتجهي الوحدة بالرمزين:  
على الترتيب  $i = \langle 1, 0 \rangle, j = \langle 0, 1 \rangle$   
كما يسمى المتجهان  $i, j$  متجهي الوحدة القياسيين

تحقق من فهمك : ص 229-



اكتب المتجه  $\overline{DE}$  المعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة  $i, j$  في كل مما يلي:

$$D(-6, 0), E(2, 5) \text{ (5A)}$$

$D(-3, -8), E(7,1)$  (5B)

تدرب: ص 231-



اكتب المتجه  $\overrightarrow{DE}$  المعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة تو افق خطي لمتجهي الوحدة  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  في كل مما يلي:

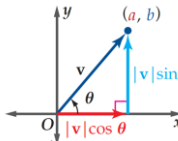
$D(4, -1), E(5, -7)$  (19)

إيجاد الصورة الإحداثية:

6



$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \langle a, b \rangle \\ &= |\mathbf{v}|(\cos \theta)\mathbf{i} + |\mathbf{v}|(\sin \theta)\mathbf{j} \end{aligned}$$



تحقق من فهمك: ص 229-



أوجد الصورة الإحداثية للمتجه  $\mathbf{V}$  المعطى طولله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كل مما يلي:

$|\mathbf{V}| = 24, \theta = 210^\circ$  (6B)

$|\mathbf{V}| = 8, \theta = 45^\circ$  (6A)

تدرب: ص 232-



$|\mathbf{V}| = 4, \theta = 135^\circ$  (27)

$|\mathbf{V}| = 12, \theta = 60^\circ$  (25)

لكل قيمة لـ  $\tan \theta$  توجد زاويتان مختلفتان بناء على العلاقة:  
 $\tan \theta = \tan(\theta + 180)$



لإيجاد زاوية اتجاه المتجه  $V = \langle a, b \rangle$  مع الاتجاه الأفقي الموجب نحل المعادلة:

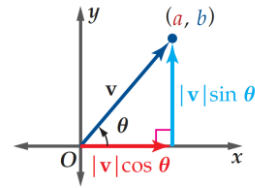
$$V = \langle a, b \rangle$$

أو

$$\tan \theta = \frac{|V| \sin \theta}{|V| \cos \theta}$$

إذا كانت قيمة  $\tan \theta$  سالبة فإن  $\theta$  تقع في الربع الثاني أو الرابع

إذا كانت قيمة  $\tan \theta$  موجبة فإن  $\theta$  تقع في الربع الأول أو الثالث



تحقق من فهمك : ص 230 -



أوجد زاوية اتجاه كل من المتجهين الآتين مع الاتجاه الموجب لمحور x :

$$\langle -3, -8 \rangle \text{ (7B)}$$

$$-6i + 2j \text{ (7A)}$$

تدرب: ص 232 -



$$\langle -5, 9 \rangle \text{ (32)}$$

$$3i + 6j \text{ (29)}$$



8) كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة  $7m/s$  ليبرمي الكرة بسرعة  $25m/s$  ، بزاوية  $40^\circ$  مع الأفقي ، أوجد محصلة السرعة

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



33) ملاحه جوية: تطير طائرة جهة الشرق بسرعة مقدارها  $600 mi/h$  وتهب الرياح بسرعة مقدارها  $85mi/h$  ، باتجاه  $S 59^\circ E$  ،

(a) أوجد محصلة سرعة الطائرة .

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

(b) أوجد زاوية اتجاه مسار الطائرة .

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

مهارات التفكير العليا: ص 233-

43) تبرير: إذا كان  $a, b$  متجهين متوازيين فعبّر عن كل من المتجهين بالصورة الإحداثية مبينا العلاقة بين  $a, b$

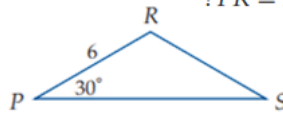
تدرب على الاختبار: ص 233-

55) ما طول المتجه الذي نقطة بدايته  $(2, 5)$ ، ونقطة نهايته  $(-3, -4)$  ؟

$\sqrt{2}$  A       $\sqrt{82}$  C

$\sqrt{26}$  B       $\sqrt{106}$  D

56) ما مساحة المثلث المجاور إذا علمت أن  $PR = RS$  ؟



$9\sqrt{2}$  A       $9\sqrt{3}$  B       $18\sqrt{2}$  C       $18\sqrt{3}$  D

الواجب:



A large rectangular area with a blue border, containing horizontal dotted lines for writing the answer.

## تحصيلي رياضيات

ما الصورة الإحداثية لـ $\overline{AB}$ ، حيث $A(-4, 1)$ ، $B(2, -5)$ ؟				
$\langle -4, 1 \rangle$	<input type="radio"/> B		$\langle -8, -5 \rangle$	<input type="radio"/> A
$\langle 2, -5 \rangle$	<input type="radio"/> D		$\langle 6, -6 \rangle$	<input type="radio"/> C

طول المتجه $C = \langle 0, 6 \rangle$ يساوي ....				
6	<input type="radio"/> B		8	<input type="radio"/> A
2	<input type="radio"/> D		4	<input type="radio"/> C

أي المتجهات التالية طوله 6 وحدات؟				
$\langle \sqrt{5}, 1 \rangle$	<input type="radio"/> B		$\langle 2, 4 \rangle$	<input type="radio"/> A
$\langle 2, \sqrt{3} \rangle$	<input type="radio"/> D		$\langle 3\sqrt{3}, 3 \rangle$	<input type="radio"/> C

إذا كان لدينا المتجهين $A = \langle 5, -3 \rangle$ ، $B = \langle 1, 4 \rangle$ ، فأوجد $2A - B$				
$\langle 6, 1 \rangle$	<input type="radio"/> B		$\langle 9, -10 \rangle$	<input type="radio"/> A
$\langle -3, 11 \rangle$	<input type="radio"/> D		$\langle 4, -7 \rangle$	<input type="radio"/> C

إذا كان ، $A = \langle 3, 4 \rangle$ ، $B = \langle 2, -1 \rangle$ فأوجد $3A - B$				
$\langle 1, 5 \rangle$	<input type="radio"/> B		$\langle 7, 13 \rangle$	<input type="radio"/> A
$\langle 7, 3 \rangle$	<input type="radio"/> D		$\langle 11, 13 \rangle$	<input type="radio"/> C

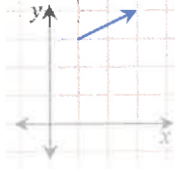
إذا كان $A = \langle 1, 2 \rangle$ ، $C = \langle 4, 0 \rangle$ ، $B = \langle -3, 5 \rangle$ ، فأوجد $C - 2A + B$				
$\langle -1, 1 \rangle$	<input type="radio"/> B		$\langle 1, -1 \rangle$	<input type="radio"/> A
$\langle -14, 0 \rangle$	<input type="radio"/> D		$\langle 0, -14 \rangle$	<input type="radio"/> C



## تحصيلي رياضيات

ما متجه الوحده $u$ الذي له نفس اتجاه المتجه $v = \langle 4, 3 \rangle$ ؟			
$\langle \frac{5}{4}, \frac{5}{4} \rangle$	(B)	$\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \rangle$	(A)
$\langle 4, 3 \rangle$	(D)	$\langle 2, 2 \rangle$	(C)

المتجه: $v = 5i - 2j$ بالصورة الإحداثية يساوي ....			
$\langle 2, 5 \rangle$	(B)	$\langle 5, 2 \rangle$	(A)
$\langle -2, 5 \rangle$	(D)	$\langle 5, -2 \rangle$	(C)

 <p>أي التالي يعبر عن المتجه الممثل في الشكل ؟</p>			
$-3i + j$	(B)	$3i + j$	(A)
$-2i + 2j$	(D)	$2i + j$	(C)

الصورة الإحداثية لمتجه $v$ طوله 14 وزاوية اتجاهه مع الأفقي $210^\circ$			
$\langle -7\sqrt{3}, -7 \rangle$	(B)	$\langle 7, 7\sqrt{3} \rangle$	(A)
$\langle 14, 210 \rangle$	(D)	$\langle -7\sqrt{3}, 7 \rangle$	(C)

الصورة الإحداثية لمتجه طوله 6 وزاوية اتجاهه مع الأفقي $150^\circ$ ؟			
$\langle 3, -3\sqrt{3} \rangle$	(B)	$\langle -3\sqrt{3}, 3 \rangle$	(A)
$\langle 3\sqrt{3}, -3 \rangle$	(D)	$\langle 3, 3\sqrt{3} \rangle$	(C)

أي المتجهات التالية طوله $2\sqrt{2}$ وزاوية اتجاهه $150^\circ$ ؟			
$\langle -2, 2 \rangle$	(B)	$\langle 2, -2 \rangle$	(A)
$2i + 2j$	(D)	$i + j$	(C)

## تحصيلي رياضيات

ما الصورة الإحداثية لـ $\overline{AB}$ ، حيث $A(5, 3)$ ، $B(6, -9)$ ؟				13	
$\langle 1, -12 \rangle$	(B)		$\langle 11, -6 \rangle$		(A)
$\langle 30, 27 \rangle$	(D)		$\langle -1, 12 \rangle$		(C)

إذا كان $u = \langle -1, 4 \rangle$ ، $u + v = \langle 4, 5 \rangle$ ، فإن $v$ يساوي .....				14	
$\langle 5, 1 \rangle$	(B)		$\langle 3, 9 \rangle$		(A)
$\langle 3, 1 \rangle$	(D)		$\langle -5, -1 \rangle$		(C)

إذا كان $-\frac{1}{2}v = \langle -4, 12 \rangle$ فإن $v$ يساوي .....				15	
$\langle -2, 6 \rangle$	(B)		$\langle 2, -6 \rangle$		(A)
$\langle 8, -24 \rangle$	(D)		$\langle -8, 24 \rangle$		(C)

المتجه $V = \langle 2, 3 \rangle$ . بدلالة متجهي الوحدة القياسيين يساوي ....				16	
$2i - 3j$	(B)		$2i + 3j$		(A)
$i + j$	(D)		$5i + j$		(C)

يسمى الضرب الداخلي في بعض الأحيان بالضرب القياسي



يكون المتجهان غير الصفرين  $a, b$  متعامدين إذا فقط إذا كان:  
 $a \cdot b = 0$

يعرف الضرب الداخلي للمتجهين  $a = \langle a_1, a_2 \rangle, b = \langle b_1, b_2 \rangle$  كالآتي:  
 $a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2$

1 استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين:

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين  $u, v$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين:

تحقق من فهمك: ص 235-



$u = \langle -2, -3 \rangle, v = \langle 9, -6 \rangle$  (1B)

$u = \langle 3, -2 \rangle, v = \langle -5, 1 \rangle$  (1A)

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين  $u, v$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين:

تدرب: ص 238-



$u = 11i + 7j, v = 7i + 11j$  (4)

$u = \langle 9, -3 \rangle, v = \langle 1, 3 \rangle$  (2)

$u = \langle 3, -5 \rangle, v = \langle 6, 2 \rangle$  (1)

1 استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول المتجه:

استعمل الضرب الداخلي، لإيجاد طول كل من المتجهات الآتية:

تحقق من فهمك: ص 235-



$c = \langle -1, -7 \rangle$  (2B)

$b = \langle 12, 16 \rangle$  (2A)

استعمل الضرب الداخلي لإيجاد طول كل من المتجهات الآتية:

تدرب: ص 238-



$$r = \langle -9, -4 \rangle \text{ (8)}$$

$$m = \langle -3, 11 \rangle \text{ (7)}$$

إيجاد قياس الزاوية بين متجهين:

3



يكون المتجهان  
متوازيان

يكون المتجهان  
متعامدان

إذا كانت  $\theta$  زاوية بين متجهين غير صفرين  
فإن:  $a, b$

إذا كانت الزاوية بينهما  $0^\circ$  أو  $180^\circ$

إذا كانت الزاوية بينهما  $90^\circ$

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$

تحقق من فهمك: ص 23-



أوجد قياس الزاوية  $\theta$  بين المتجهين  $v, u$  في كل مما يأتي:

$$u = \langle 9, 5 \rangle, v = \langle -6, 7 \rangle \text{ (3B)}$$

$$u = \langle -5, -2 \rangle, v = \langle 4, 4 \rangle \text{ (3A)}$$

تدرب: ص 238-



أوجد قياس الزاوية  $\theta$  بين المتجهين  $v, u$  في كل مما يأتي وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

$$u = -2i + 3j, v = -4i - 2j \quad (14)$$

$$u = \langle 0, -5 \rangle, v = \langle 1, -4 \rangle \quad (11)$$

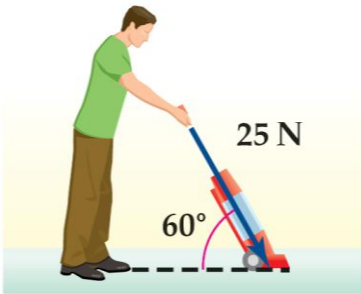
حساب الشغل:

4

تحقق من فهمك: ص 237-



(4) تنظيف: يدفع إبراهيم مكنسة كهربائية بقوة مقدارها 25N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض  $60^\circ$ ، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6m ؟



تدرب: ص 238-



(16) فيزياء: يدفع طارق برميلا على أرض مستوية مسافة 1.5 m بقوة مقدارها 534N، بزاوية  $25^\circ$ ، أوجد مقدار الشغل بالجول الذي بذله طارق وقرب الناتج إلى أقرب عدد صحيح.



مهارات التفكير العليا: ص 239-

33) اكتشف الخطأ: يدرس كل من فهد وفيصل خصائص الضرب الداخلي للمتجهات فقال فهد: إن الضرب الداخلي للمتجهات عملية تجميعية، لأنها إبدالية، أي أن:  $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$  ولكن فيصل عارضه، فأيهما كان على صواب؟ وضح اجابتك؟

تدرب على الاختبار: ص 239-

45) ما قياس الزاوية بين المتجهين  $\langle -1, -1 \rangle$ ,  $\langle -9, 0 \rangle$  ؟

0° A      90° C

45° B      135° D

46) إذا كان:  $t = \langle -6, 2 \rangle$ ,  $s = \langle 4, -3 \rangle$ ، فأَيُّ مما يأتي يمثل  $r$ ، حيث

$r = t - 2s$

$\langle 14, 8 \rangle$  A       $\langle -14, 8 \rangle$  C

$\langle 14, 6 \rangle$  B       $\langle -14, -8 \rangle$  D

الواجب:



A large rectangular area with a blue border, containing horizontal dotted lines for writing the answer.

## تحصيلي رياضيات

إذا كان حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يساوي صفر فإن الزاوية بينهما تكون ....			
حادة	(A)	قائمة	(B)
منفرجة	(C)	مستقيمة	(D)

إذا كان $u = \langle -3, 6 \rangle$ , $v = \langle 2, -5 \rangle$ , $w = \langle 8, 4 \rangle$ , $c = \langle -2, 7 \rangle$ فإن المتجهين المتعامدين هما .....			
$v, u$	(A)	$v, w$	(B)
$w, u$	(C)	$v, c$	(D)

ما قيمة $a$ التي تجعل المتجهين $u = ai + 2j$ , $v = 3i + 6j$ متعامدين؟			
-4	(A)	-3	(B)
3	(C)	4	(D)

إذا كان المتجهان $u = \langle 1, -2 \rangle$ , $v = \langle 3, k \rangle$ متعامدان، فما قيمة $k$ ؟			
-2	(A)	$-\frac{3}{2}$	(B)
$\frac{3}{2}$	(C)	2	(D)

ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle 2, 0 \rangle$ , $\langle 3, 3 \rangle$ ؟			
$30^\circ$	(A)	$45^\circ$	(B)
$120^\circ$	(C)	$135^\circ$	(D)

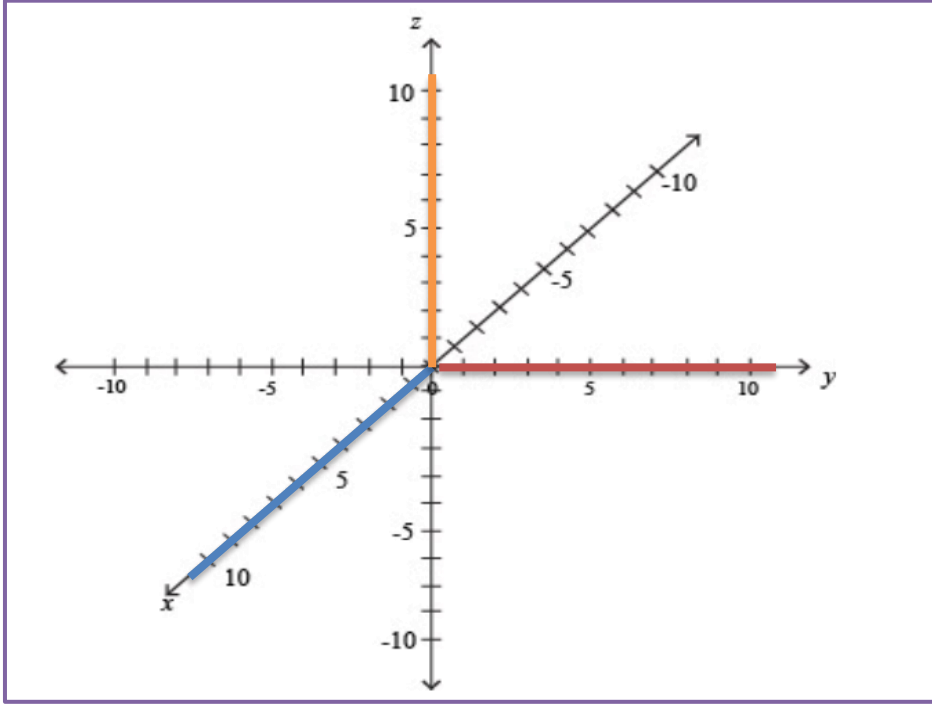
إذا كان $u = \langle \sqrt{3}, 1 \rangle$ , $v = \langle 0, 4 \rangle$ فما قياس الزاوية بين المتجهين $u, v$ ؟			
$30^\circ$	(A)	$60^\circ$	(B)
$120^\circ$	(C)	$240^\circ$	(D)



1 تعيين نقطة في الفضاء

عين كلا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

تحقق من فهمك : ص 241-



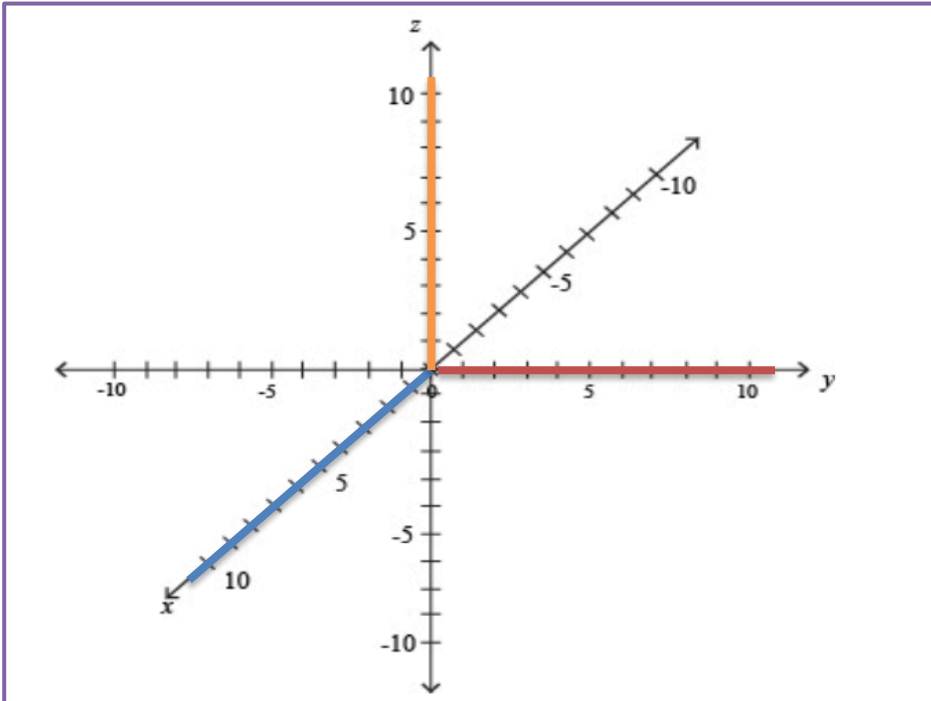
(1A)  $(-3, -4, 2)$

(1B)  $(3, 2, -3)$

(1C)  $(5, -4, -1)$

عين كلا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

تدرب: ص 245-



(1)  $(1, -2, -4)$

(2)  $(3, 2, 1)$

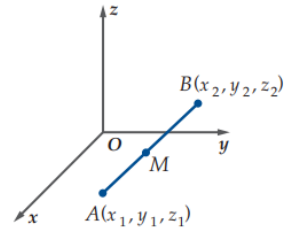
(3)  $(-5, -4, -2)$

المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء 2


المسافة بين النقطتين:  $A = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $B = (x_2, y_2, z_2)$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

نقطة المنتصف  $M$   $\perp \overline{AB}$ :  $M = \left( \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2} \right)$



تحقق من فهمك: ص 242-



2) طائرات: تفرض أنظمة السلامة ألتقل المسافة بين الطائرات عن  $0.5mi$  في أثناء طيرانها، إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق، وفي لحظة معينة كانت إحداثيات موقعي الطائرتين:  $(450, 28000) - (300, 150, 30000)$  مع العلم بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:  
A) هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة؟

الميل = 5280 قدما



B) إذا أطلقت ألعاب نارية، وأنفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين، فما إحداثيات نقطة الانفجار؟

أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا نهايتها وبدايتها،  
ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كل مما يلي:

تدرب: ص 245-



(8)  $(-6, 6, 3), (-9, -2, -2)$

(7)  $(-4, 10, 4), (1, 0, 9)$

متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

$$\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

$$\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

المتجه الصفري

$$\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

إذا كان  $\mathbf{v}$  متجهًا في الفضاء في وضع قياسي،

وكانت نقطة نهايته  $(v_1, v_2, v_3)$

فإننا نعبّر عنه بالصورة الإحداثية:

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$



يمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه  $\mathbf{v}$  على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  كما يأتي

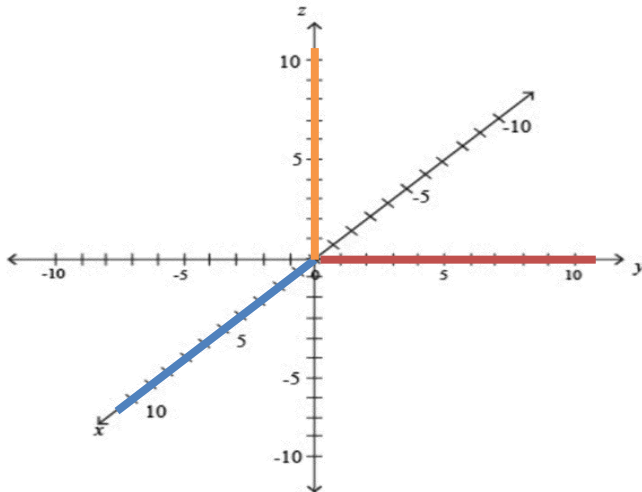
$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$$

مثل بيانها كلاً من المتجهين الآتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد

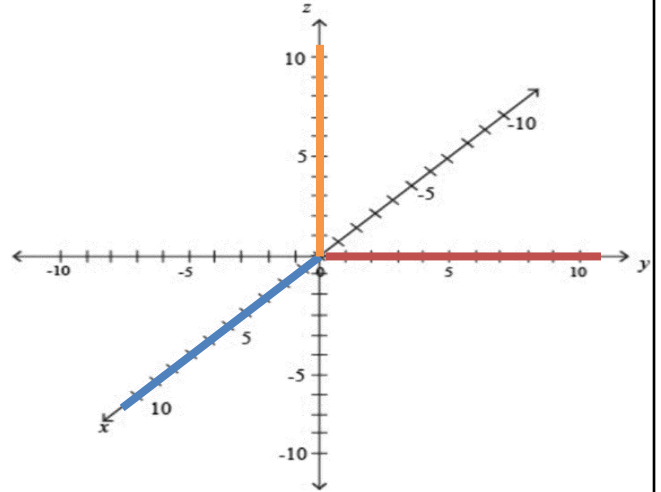
تحقق من فهمك: ص 243-



$$\mathbf{w} = -1\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \quad (3B)$$



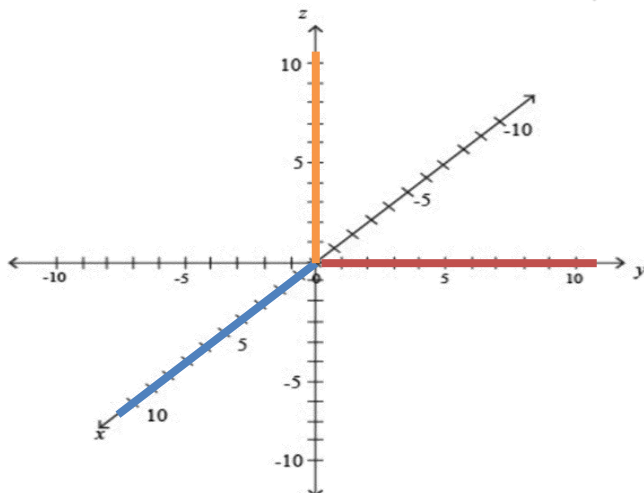
$$\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle (3A)$$



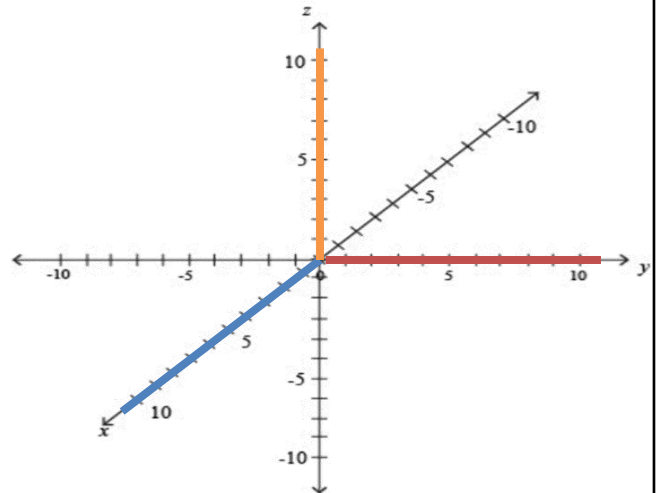
تدرب: ص 245-



$$\mathbf{w} = -10\mathbf{i} + 5\mathbf{k} \quad (17)$$



$$\mathbf{b} = \langle -3, -3, -2 \rangle (13)$$



تحقق من فهمك: ص 244-

أوجد كلا مما يأتي للمتجهات  $z = \langle -2, 0, 5 \rangle, w = \langle -1, 4, -4 \rangle, y = \langle 3, -6, 2 \rangle$ 

$$4w - 8z \quad (4A)$$

$$3y + 3z - 6w \quad (4B)$$

تدرب: ص 245-

أوجد كلا مما يأتي للمتجهات:  $a = \langle -5, -4, 3 \rangle, c = \langle -2, 2, 4 \rangle, b = \langle 6, -2, -7 \rangle$ 

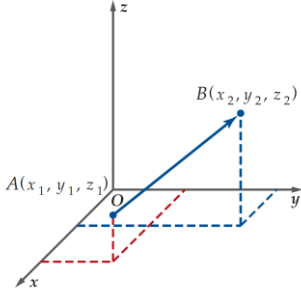
$$7a - 5b \quad (21)$$

$$2a + 5b - 9c \quad (22)$$

## 5 التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريا



الصورة الاحداثية لـ  $\overrightarrow{AB}$  ، الذي نقطة بدايته  $A(x_1, y_1, z_1)$  ، ونقطة نهايته  $B(x_2, y_2, z_2)$  هي:  $\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$



إذا كان  $\overrightarrow{AB}$  متجهاً نقطة بدايته  $(x_1, y_1, z_1)$  ، ونقطة نهايته  $(x_2, y_2, z_2)$  ، فإن طول  $\overrightarrow{AB}$  هو:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

إذا كان  $\overrightarrow{AB} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  فإن:  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

ويكون متجه الوحدة  $u$  باتجاه  $\overrightarrow{AB}$  هو  $u = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

تحقق من فهمك : ص 244-



أوجد الصورة الإحداثية ، وطول  $\overrightarrow{AB}$  المعطاه نقطتا بدايته ونهايته . ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه  $\overrightarrow{AB}$  في كل مما يأتي:

$$A = \langle -2, -5, -5 \rangle, B = \langle -1, 4, -2 \rangle \text{ (5A)}$$

.....

.....

.....

.....

$$A = \langle -1, 4, 6 \rangle, B = \langle 3, 3, 8 \rangle \text{ (5B)}$$

.....

.....

.....

.....



أوجد الصورة الإحداثية، وطول  $\overline{AB}$  المعطاه نقطتا بدايته ونهايته، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه  $\overline{AB}$  في كل مما يأتي:

$$(32) \quad A = \langle -5, -5, -9 \rangle, B = \langle 11, -3, -1 \rangle$$

$$(34) \quad A = \langle 3, 5, 1 \rangle, B = \langle 0, 0, -9 \rangle$$

مهارات التفكير العليا: ص 246-

(53) تحدّ: إذا كانت  $M$  هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة

الواصلة بين النقطتين:  $M_1(-1, 2, -5), M_2(3, 8, -1)$ .

فأوجد إحداثيات منتصف القطعة الممتقمة  $M_1M$ .

تدرّب على الاختبار: ص 246-

(61) ما نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط  
 $A(0, 3, 5), B(1, 0, 2), C(0, -3, 5)$  ؟

A قائم الزاوية

B متطابق الضلعين

C متطابق الأضلاع

D مختلف الأضلاع

الواجب:



A large rectangular area with a blue border, containing horizontal dotted lines for writing the answer.

## تحصيلي رياضيات

أي التالي يمثل $\overline{AB}$ إذا كان: $A(3, 4, -4), B(-5, 2, 1)$ ؟			
$\langle 8, -2, 3 \rangle$	(B)	$\langle -8, -2, 5 \rangle$	(A)
$\langle -8, -2, -3 \rangle$	(D)	$\langle 8, 2, -3 \rangle$	(C)

إذا كان: $A(-5, 0, 2), B(3, 6, 2)$ فإن متجه الوحدة الذي له اتجاه $\overline{AB}$ هو....			
$\langle 2, \frac{3}{2}, 0 \rangle$	(B)	$\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0 \rangle$	(A)
$\langle \frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, 0 \rangle$	(D)	$\langle -1, 3, 2 \rangle$	(C)

إذا كان $a = \langle 2, 4, -3 \rangle, b = \langle -5, -7, 1 \rangle$ فإن $2a - b$ تساوي.....			
$\langle 4, 8, -6 \rangle$	(B)	$\langle -1, 1, 5 \rangle$	(A)
$\langle 9, 15, -5 \rangle$	(D)	$\langle 9, 15, -7 \rangle$	(C)

طول المتجه $w = 5i + 3j - \sqrt{2}k$ يساوي....			
6	(B)	$8 - \sqrt{2}$	(A)
$4\sqrt{2}$	(D)	$8 + \sqrt{2}$	(C)

متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\langle 2, -3, 6 \rangle$ يساوي....			
$\langle \frac{2\sqrt{31}}{31}, \frac{3\sqrt{31}}{31}, \frac{6\sqrt{31}}{31} \rangle$	(B)	$\langle 1, 1, 1 \rangle$	(A)
$\langle \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{6} \rangle$	(D)	$\langle \frac{2}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{6}{7} \rangle$	(C)

إذا كانت $(3, 0, 6)$ نقطة المنتصف بين النقطتين: $A(2, 3, 4), B(4, -3, k)$ فإن $k$ تساوي.....			
6	(B)	2	(A)
12	(D)	8	(C)



يكون المتجهان غير الصفريين  
متعامدين  $a, b$   
إذا وفقط إذا كان:  
 $a \cdot b = 0$



يعرف الضرب الداخلي للمتجهين  
 $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ,  $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$   
في الفضاء كالاتي:  
 $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

1 إيجاد الضرب الداخلي لتحديد المتجهات المتعامدة

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين  $u, v$ ، ثم حدد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

تحقق من فهمك: ص 247-



$u = \langle 4, -2, -3 \rangle$ ,  $v = \langle 1, 3, -2 \rangle$  (1B)

$u = \langle 3, -5, 4 \rangle$ ,  $v = \langle 5, 7, 5 \rangle$  (1A)

تدرب: ص 250-



$u = 6i - 2j - 5k$ ,  $v = 3i - 2j + 6k$  (5)

$u = \langle 3, -9, 6 \rangle$ ,  $v = \langle -8, 2, 7 \rangle$  (1)

2 الزاوية بين متجهين في الفضاء



إذا كانت  $\theta$  زاوية بين متجهين غير صفريين في الفضاء  $a, b$  فإن:  $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$

تحقق من فهمك: ص 247-



(2) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين:  $u = -4i + 2j + k$ ,  $v = 4i + 3k$ ، إلى أقرب منزلة عشرية:

أوجد قياس الزاوية  $\theta$  بين المتجهين  $u, v$ ، في كل مما يأتي  
وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة

تدرب: ص 250-



$$u = -3i + 2j + 9k, v = 4i + 3j - 10k \quad (11)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$u = \langle 6, -5, 1 \rangle, v = \langle -8, -9, 5 \rangle \quad (8)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

إيجاد الضرب الاتجاهي للمتجهين :

3

إذا كان  $a = a_1i + a_2j + a_3k, b = b_1i + b_2j + b_3k$  فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين  $a, b$  هو المتجه

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2)i - (a_1 b_3 - a_3 b_1)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k$$



الضرب الاتجاهي للمتجهين  $a, b$  هو متجه **وليس عدد**

تحقق من فهمك : ص 248-



أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين  $u, v$ ، في كل مما يأتي، ثم بين أن  $u \times v$  يعامد كلا من  $u, v$

$$u = \langle -2, -1, -3 \rangle, v = \langle 5, 1, 4 \rangle \quad (3B)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$u = \langle 4, 2, -1 \rangle, v = \langle 5, 1, 4 \rangle \quad (3A)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين  $u, v$ ، في كل مما يأتي، ثم بين أن  $u \times v$  يعامد كلا من  $u, v$

$$u = -2i - 2j + 5k, v = 7i + j - 6k \quad (15)$$

مساحة متوازي أضلاع في الفضاء:

4



لإيجاد مساحة متوازي أضلاع في الفضاء:

✓ نوجد  $u \times v$

✓ نوجد طول  $|u \times v|$

تحقق من فهمك: ص 249-



4) أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه:  $u = -6i - 2j + 3k, v = 4i + 3j + k$  ضلعان متجاوران ،



أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه  $u, v$  ضلعان متجاوران ،

$$u = \langle -9, 1, 2 \rangle, v = \langle 6, -5, 3 \rangle \quad (16)$$

الضرب القياسي الثلاثي :

إذا كان:

$$t = t_1 i + t_2 j + t_3 k, \quad u = u_1 i + u_2 j + u_3 k, \quad v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

فإن الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات  $t, u, v$  يعرف كالآتي :



$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

حجم متوازي السطوح:

5

تحقق من فهمك : ص 249-



5) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه :  $t = 2j - 5k$ ,  $u = -6i - 2j + 3k$ ,  $v = 4i + 3j + k$  أحرف متجاورة.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تدرب : ص 250-



5) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه :  $t = \langle -1, -9, 2 \rangle$ ,  $u = \langle 4, -7, -5 \rangle$ ,  $v = \langle 3, -2, 6 \rangle$  أحرف متجاورة.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(43) تحد: إذا كان

$$\mathbf{u} = \langle 4, 6, C \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 3, -2, 5 \rangle$$

فأوجد قيمة  $C$  التي تجعل

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 34\mathbf{i} - 26\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$$

تدرب على الاختبار: ص 251-

(54) أي مما يأتي متجهان متعامدان؟

$\langle 1, 0, 0 \rangle, \langle 1, 2, 3 \rangle$  **A**

$\langle 1, -2, 3 \rangle, \langle 2, -4, 6 \rangle$  **B**

$\langle 3, 4, 6 \rangle, \langle 6, 4, 3 \rangle$  **C**

$\langle 3, -5, 4 \rangle, \langle 6, 2, -2 \rangle$  **D**

(55) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين:

$$\mathbf{u} = \langle 3, 8, 0 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -4, 2, 6 \rangle$$

$48\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$  **A**

$48\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$  **B**

$46\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$  **C**

$46\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$  **D**

الواجب:



A large rectangular area with a blue border, containing numerous horizontal dotted lines for writing the answer.

تصليبي رياضيات

إذا كان: $u = \langle b, -3, 1 \rangle, v = \langle -2, -1, 3 \rangle$ فما قيمة $b$ التي تجعل المتجهين $u, v$ متعامدين؟				1
-3	(B)		-6 (A)	
6	(D)		3 (C)	

أوجد: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$				2
$-2i + j - 4k$	(B)		$2i + j + 4k$ (A)	
$-2i - j - 4k$	(D)		$2i - j + 4k$ (C)	

إذا كان: $u = \langle 1, -2, 0 \rangle, v = \langle 2, 0, -1 \rangle$ متجهين فإن $u \times v$ يساوي .....				3
$\langle 1, 1, -2 \rangle$	(B)		$\langle -1, -1, 2 \rangle$ (A)	
$\langle 1, -1, -2 \rangle$	(D)		$\langle -1, 1, 2 \rangle$ (C)	

متوازي أضلاع فيه $u = 7i + 2j - 2k$ و $v = 4i + 3j + 3k$ ضلعان كتجاوران ، ما مساحته بالوحدات المربعة؟				4
21	(B)		13 (A)	
$\sqrt{458}$	(D)		$\sqrt{186}$ (C)	

قياس الزاوية بين المتجهين $a = \langle \sqrt{2}, 2, 0 \rangle, b = \langle \sqrt{3}, 0, 1 \rangle$ يساوي .....				5
$45^\circ$	(B)		$30^\circ$ (A)	
$90^\circ$	(D)		$60^\circ$ (C)	

أي المتجهات التالية عمودي على المتجهين: $w = 4i + 3j - k$ و $v = 2i - k$				6
$\langle -3, 6, -6 \rangle$	(B)		$\langle -3, 2, 6 \rangle$ (A)	
$\langle -3, -6, 6 \rangle$	(D)		$\langle 3, -2, 6 \rangle$ (C)	



انتمى الفصل الدراسي الثاني

